МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ
НАЦІОНАЛЬНИЙ ТЕХНІЧНИЙ УНІВЕРСИТЕТ УКРАЇНИ
«КИЇВСЬКИЙ ПОЛІТЕХНІЧНИЙ ІНСТИТУТ
імені ІГОРЯ СІКОРСЬКОГО»

КОМПЛЕКСНИЙ АНАЛІЗ
РОЗРАХУНКОВА РОБОТА

*Рекомендовано Методичною радою КПІ ім. Ігоря Сікорського
як навчальний посібник для студентів,
які навчаються за спеціальністю 111 ”Математика”*

Київ
КПІ ім. Ігоря Сікорського
2017

Комплексний аналіз. Розрахункова робота [Електронний ресурс]: навчальний посібник для студентів спеціальністі 111 ”Математика” / КПІ ім. Ігоря Сікорського; уклад.: В. В. Дрозд, Н. М. Задерей, П. В. Задерей, І. І. Голіченко. – Електронні текстові дані (1 файл: 0,85 Мбайт). – Київ: КПІ ім. Ігоря Сікорського, 2017. – 110 с.

Гриф надано Методичною радою КПІ ім. Ігоря Сікорського
(протокол №6 від 22.02.2018 р.)
за поданням Вченої ради факультету (протокол №8 від 22.12.2017 р.)

Електронне мережне навчальне видання

КОМПЛЕКСНИЙ АНАЛІЗ
РОЗРАХУНКОВА РОБОТА

Укладачі:
Дрозд В'ячеслав Володимирович, канд. фіз. мат. наук, доцент
Задерей Надія Миколаївна, канд. фіз. мат. наук, доцент
Задерей Петро Васильович, доктор фіз. мат. наук, професор
Голіченко Ірина Ігорівна, канд. фіз. мат. наук

Відповідальний редактор:
Клесов Олег Іванович, доктор фіз. мат. наук, професор

Рецензент:
Плакса Сергій Анатолійович, доктор фіз. мат. наук, професор

Дисципліна ”Комплексний аналіз” включає в себе такі розділи: поняття комплексного числа та функції комплексної змінної, диференціювання та інтегрування функції комплексної змінної, розклад аналітичної функції у степеневий ряд та ряд Лорана, теорія лишків, елементи теорії конформних відображень, операційне числення та його застосування.

Навчальне видання призначене для студентів третього курсу фізико - математичного факультету спеціальності 111 Математика. Воно містить стислий виклад теоретичного матеріалу курсу, передбачений програмою, зразок розв'язання варіанту типової розрахункової роботи, 30 варіантів індивідуальних завдань та список допоміжної літератури.

Передмова

Студенти фізико-математичного факультету вивчають курс комплексного аналізу протягом п'ятого і шостого семестрів. Значна увага приділяється вивченню основних понять комплексного аналізу і розвитку навичок з розв'язування типових задач. Цьому повинна сприяти активна самостійна робота студентів, яка є основою успішного оволодіння курсом комплексного аналізу. Однією з форм активізації самостійної роботи студентів є виконання типових індивідуальних розрахункових завдань. В даний збірник входить 30 варіантів таких завдань, що дозволяє кожному студенту запропонувати індивідуальне завдання, яке містить 25 задач. Крім того, в посібнику наведені основні теоретичні відомості з кожної теми, а також розв'язки типових задач.

Система типових розрахункових завдань не виключає традиційних домашніх завдань, а навпаки (що важливо) доповняє домашні завдання.

Типові розрахункові завдання виконуються частинами, по мірі вивчення теоретичного курсу комплексного аналізу і опрацювання його на практичних заняттях, і подаються на перевірку викладачу у вказані ним строки. Невірно розв'язані приклади повертаються студенту на доопрацювання з вказівкою характеру помилки.

Автори даного посібника будуть вдячні за критичні зауваження, які сприятимуть його покращенню.

Теоретичні відомості

1. Комплексні числа та дії над ними

Комплексним числом називається впорядкована пара $z = z(x, y)$ двох дійсних чисел x та y. Комплексне число $(x, 0)$ ототожнюється з дійсним числом x.

На множині $\mathbb{C}$ комплексних чисел, тобто на множині впорядкованих пар, вводяться алгебраїчні операції згідно правил

$$\lambda z = (\lambda x, \lambda y),\ \lambda \in \mathbb{R},$$
$$z_1 + z_2 = (x_1 + x_2, y_1 + y_2),$$
$$z_1 \cdot z_2 = (x_1 x_2 - y_1 y_2, x_1 y_2 + x_2 y_1).$$

Два елементи $z_1 = (x_1, y_1), z_2 = (x_2, y_2) \in \mathbb{C}$ вважаємо рівними тоді і лише тоді, коли $x_1 = x_2, y_1 = y_2$.

Число $(0, 1)$ називається уявною одиницею і позначається $(0, 1) = i$, оскільки це число має властивість $i^2 = (0, 1) \cdot (0, 1) = -1$. Будь-яке комплексне число $z = (x.y)$ можна представити у вигляді

$$z = (x, y) = (x, 0) + (y, 0)(0, 1) = x + y(0, 1) = x + iy. \qquad (1)$$

Запис (1) називають алгебраїчною формою запису комплексного числа. При цьому число x називається дійсною, число y – уявною частиною комплексного числа z і позначаються $x = \operatorname{Re} z$, $y = \operatorname{Im} z$.

Довільному комплексному числу $z = (x, y) = x + iy$ ставиться у відповідність точка площини $\mathbb{R}^2$ з абсцисою x та ординатою y і навпаки: кожній точці площини відовідає комплексне число. Тому площину xOy будемо називати комплексною площиною і позначатимемо $\mathbb{C}$.

Якщо $z = x+iy$, то число $x-iy$ називається спряженим з ним і позначається $\overline{z}$.

Арифметичні дії над комплексними числами $z_1 = x_1 + iy_1$, $z_2 = x_2 + iy_2$ виконуються за такими формулами:

1) $z_1 \pm z_2 = (x_1 \pm x_2) + i(y_1 \pm y_2)$;

2) $z_1 \cdot z_2 = (x_1 x_2 - y_1 y_2) - i(x_1 y_2 + x_2 y_1)$;

3) $\dfrac{z_1}{z_2} = \dfrac{z_1 \cdot \overline{z_2}}{z_2 \cdot \overline{z_2}} = \dfrac{x_1 x_2 + y_1 y_2}{x_2^2 + y_2^2} + i\dfrac{y_1 x_2 - x_1 y_2}{x_2^2 + y_2^2}, z_2 \neq 0.$

Додавання (віднімання) комплексних чисел виконується за правилом додавання (віднімання) векторів. Довжина вектора, що відповідає числу z, називається модулем цього числа і позначається через $|z|$, тобто $|z| = \sqrt{x^2 + y^2} = \sqrt{z \cdot \overline{z}}$, а кут між цим вектором і додатнім напрямом дійсної осі Ox називається аргументом числа z і позначається $\operatorname{Arg} z$. Для $z = 0$ поняття аргументу не має смислу.

Аргумент будь-якого комплексного числа $z \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ визначається з точністю до $2k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$. Серед всіх значень $\operatorname{Arg} z$, $z \neq 0$, значення, що задовольняють нерівність $-\pi < \varphi \le \pi$, називається головним значенням і позначається $\arg z$, тому $\operatorname{Arg} z = \arg z + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}$.

$$\arg z = \begin{cases} \operatorname{arctg} \dfrac{y}{x},\ x > 0; \\ \pi + \operatorname{arctg} \dfrac{y}{x},\ x < 0, y \ge 0; \\ -\pi + \operatorname{arctg} \dfrac{y}{x},\ x < 0, y < 0; \\ \dfrac{\pi}{2},\ x = 0, y > 0; \\ -\dfrac{\pi}{2},\ x = 0, y < 0. \end{cases}$$

Кожне комплексне число $z \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ можна записати у вигляді

$$z = |z|(\cos \arg z + \sin \arg z)$$

Така форма запису називається тригонометричною формою.

Два комплексних числа рівні, якщо рівні їх модулі, а аргументи відрізняються на число кратне 2π.

• Тригонометрична (показникова) форма комплексного числа $z = x + iy$	$z = \rho(\cos\varphi + i\sin\varphi)$ $(z = \rho e^{i\varphi})$
• Формули Ейлера	$e^{i\varphi} = \cos\varphi + i\sin\varphi,$ $e^{i\pi} - 1 = 0$
• Модуль комплексного числа	$\lvert z\rvert = \sqrt{x^2 + y^2},\ \lvert z_1 + z_2\rvert \le \lvert z_1\rvert + \lvert z_2\rvert$
• Аргумент комплексного числа	$\varphi = \operatorname{Arg} z = \arg z + 2k\pi,\ \ k \in \mathbb{Z}, \arg z \in (-\pi, \pi]$
• Добуток комплексних чисел	$z_1 z_2 = \rho_1\rho_2(\cos(\varphi_1 + \varphi_2) + \sin(\varphi_1 + \varphi_2)) =$ $= \rho_1\rho_2 e^{i(\varphi_1+\varphi_2)}$
• Спряжене до комплексного числа	$\overline{z} = \rho(\cos(-\varphi) + \sin(-\varphi)) = \rho e^{-i\varphi},$ $\overline{z_1 \pm z_2} = \overline{z_1} + \overline{z_2},$ $\overline{z_1 \cdot z_2} = \overline{z_1} \cdot \overline{z_2},\ \overline{\left(\frac{z_1}{z_2}\right)} = \left(\frac{\overline{z_1}}{\overline{z_2}}\right),\ z_2 \ne 0.$

• Частка комплексних чисел	$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{\rho_1}{\rho_2}(\cos(\varphi_1 - \varphi_2) + \sin(\varphi_1 - \varphi_2)) =$$ $$= \frac{\rho_1}{\rho_2} e^{i(\varphi_1 - \varphi_2)}$$
• Натуральний степінь комплексного числа	$z^n = \rho^n(\cos(n\varphi) + i\sin(n\varphi)) = \rho^n e^{in\varphi},\ n \in \mathbb{N}$
• Формула Муавра	$(\cos(\varphi) + i\sin(\varphi))^n = (\cos(n\varphi) + i\sin(n\varphi))$
• Корінь з комплексного числа	$$\omega = \sqrt[n]{z} =$$ $$= \sqrt[n]{\rho}\left(\cos\left(\tfrac{\varphi+2\pi k}{n}\right) + i\sin\left(\tfrac{\varphi+2\pi k}{n}\right)\right) =$$ $$= \sqrt[n]{\rho} e^{i\frac{\varphi+2\pi k}{n}},\ k = 0, 1, \ldots, n-1.$$ Всі значення $\sqrt[n]{z}$ розташовані у вершинах правильного n - кутника.

2. Основні елементарні функції комплексного змінного

• *Показникова функція*	$$e^z = 1 + \tfrac{z}{1!} + \tfrac{z^2}{2!} + \ldots + \tfrac{z^n}{n!} + \ldots =$$ $$= e^x(\cos y + i\sin y)$$
Властивості	$$e^{z_1+z_2} = e^{z_1} \cdot e^{z_2},\ e^{z=2\pi ki} = e^z,$$ $$\lvert e^z \rvert = e^x,\ \operatorname{Arg} z = y + 2k\pi$$
• *Тригонометричні функції*	$$\cos z = \frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2}, \quad \sin z = \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i},$$ $$\operatorname{tg} z = \frac{\sin z}{\cos z}, \quad \operatorname{ctg} z = \frac{\cos z}{\sin z}$$
Властивості	$$\sin(z + 2k\pi) = \sin z,\ \cos(z + 2k\pi) = \cos z,$$ $$\sin k\pi = 0,\ \cos(k\pi + \tfrac{\pi}{2}) = 0,\ k \in \mathbb{Z}.$$ Для тригонометричних функцій залишаються

	справедливими всі відомі формули тригонометрії.
• *Гіперболічні функції*	$\operatorname{ch} z = \dfrac{e^z + e^{-z}}{2}, \quad \operatorname{sh} z = \dfrac{e^z - e^{-z}}{2},$ $\operatorname{th} z = \dfrac{\operatorname{sh} z}{\operatorname{ch} z}, \quad \operatorname{cth} z = \dfrac{\operatorname{ch} z}{\operatorname{sh} z}$
Властивості	$\operatorname{sh}(z + 2k\pi i) = \operatorname{sh} z,\ \operatorname{ch}(z + 2k\pi i) = \operatorname{ch} z,$ $\operatorname{th}(z + k\pi i) = \operatorname{th} z,\ \operatorname{cth}(z + k\pi i) = \operatorname{cth} z$
• *Зв'язок між тригонометричними та гіперболічними функціями*	$\sin z = -i \operatorname{sh} iz, \operatorname{sh} z = -i \sin iz,$ $\cos z = \operatorname{ch} iz, \operatorname{ch} z = \cos iz,$ $\operatorname{tg} z = -i \operatorname{tg} iz, \operatorname{th} z = -i \operatorname{th} iz,$ $\operatorname{ctg} z = i \operatorname{ctg} iz, \operatorname{cth} z = i \operatorname{cth} iz$
• *Логарифмічна функція*	$\operatorname{Ln} z = \ln \lvert z \rvert + i(\arg z + 2\pi k), \quad k \in \mathbb{Z}$
Властивості	$\operatorname{Ln} z = \ln z + 2k\pi i,\ \operatorname{Ln} z_1 \cdot z_2 = \operatorname{Ln} z_1 + \operatorname{Ln} z_2,$ $\operatorname{Ln} \frac{z_1}{z_2} = \operatorname{Ln} z_1 - \operatorname{Ln} z_2$
• *Головне значення логарифма*	При $\ k = 0: \quad \operatorname{Ln} z = \ln z = \ln \lvert z \rvert + i \arg z$
Обернені тригонометричні функції • *Арксинус* • *Арккосинус* • *Арктангенс* • *Арккотангенс*	$\operatorname{Arcsin} z = -i \operatorname{Ln}(iz + \sqrt{1 - z^2})$ $\operatorname{Arccos} z = -i \operatorname{Ln}(z + \sqrt{z^2 - 1})$ $\operatorname{Arctg} z = -\dfrac{i}{2} \operatorname{Ln} \dfrac{1 + iz}{1 - iz}$ $\operatorname{Arcctg} z = -\dfrac{i}{2} \operatorname{Ln} \dfrac{z + i}{z - i}$
• *Степенева функція*	$w = z^a = e^{a \operatorname{Ln} z}, a = \alpha + i\beta$
• *Показникова функція*	$w = a^z = e^{z \operatorname{Ln} a}, a \neq 0$

3. Криві в комплексній площині

Рівнянн виду $z = z(t) = x(t) + iy(t)$ визначають на комплексній площині криву, параметричне рівняння якої має вигляд

$$x = x(t), \quad y = y(t).$$

4. Границя послідовності комплексних чисел

Нехай дано послідовність $\{z_n\}_{n=1}^{\infty}$ комплексних чисел, якій відповідає дві послідовності дійсних чисел $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ і $\{y_n\}_{n=1}^{\infty}$, де $z_n = x_n + i\,y_n$, $n = 1, 2, \ldots$. Послідовність $\{z_n\}_{n=1}^{\infty}$ збігається до числа $a = \alpha + i\beta$

$$\lim_{n\to\infty} x_n = \alpha, \quad \lim_{n\to\infty} y_n = \beta.$$

5. Диференціювання функцій комплексного змінного. Умови Коші-Рімана

Нехай функція $w = f(z)$ визначена в деякій області D комплексного змінного z. Нехай точки z і $z + \Delta z$ належать області D. Позначимо $\Delta w = f(z + \Delta z) - f(z)$, $\Delta z = \Delta x + i\Delta y$.

Функція $w = f(z)$ називається диференційованою в точці $z \in D$, якщо відношення $\frac{\Delta w}{\Delta z}$ має скінченну границю при $\Delta z \to 0$. Ця границя називається похідною функції $f(z)$ в даній точці z:

$$f'(z) = \lim_{\Delta z\to 0} \frac{\Delta w}{\Delta z}.$$

Якщо $z = x + iy$, $w = f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$, то в кожній точці диференційовності функції $f(z)$ виконуються співвідношення

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y}, \ \ \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x},$$

які називають умовами Коші-Рімана-Ейлера-Даламбера.

Функція $w = f(z)$ називається аналітичною в даній точці $z \in D$, якщо вона диференційовна як в самій точці, так і в деякому її околі. Функція $f(z)$ називається аналітичною в області D, якщо вона диференційовна в кожній точці цієї області. Для довільної аналітичної функції $f(z)$ маємо

$$f'(z) = \frac{\partial u}{\partial x} + i\frac{\partial v}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y} - i\frac{\partial u}{\partial y} = \frac{\partial u}{\partial x} - i\frac{\partial u}{\partial y} = \frac{\partial v}{\partial y} + i\frac{\partial v}{\partial x}.$$

Користуючись умовами Коші-Рімана, можна відновити аналітичну функцію $w = f(z)$, якщо відома її дійсна частина $u = u(x, y)$ або уявна частина $v = v(x, y)$ і, крім того, задано значення $f(z_0)$ функції в деякій точці z_0.

6. Інтегрування функцій комплексного змінного

Нехай однозначна функція $w = f(z)$ визначена і неперервна в області D, а Γ кусково-гладка крива, що лежить в D, $z = x + iy$, $f(z) = u + iv$, де функції

$u = u(x, y)$, $v = v(x, y)$ – дійсні фінкції змінних x та y. Обчислення інтеграла від функції $f(z)$ зводиться до обчислення звичайних криволінійних інтегралів, а саме,

$$\int_\Gamma f(z)\,dz = \int_\Gamma u\,dx - v\,dy + i\int_\Gamma v\,dx + u\,dy.$$

Якщо крива Γ задана параметричними рівняннями $\begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \end{cases}$ або $z = z(t) = x(t) + iy(t)$, $\alpha \leq t \leq \beta$, то

$$\int_\Gamma f(z)\,dz = \int_\alpha^\beta f(z(t))z'(t)\,dt.$$

Якщо $w = f(z)$ – аналітична функція в однозв'язній області D, що містить точки z_0 і z_1, то має місце формула Ньютона-Лейбніца

$$\int_{z_0}^{z_1} f(z)\,dz = \Phi(z_1) - \Phi(z_0) = \left.\Phi(z)\right|_{z_0}^{z_1},$$

де $\Phi(z)$ – деяка первісна для функції $f(z)$ в області D, тобто $\Phi'(z) = f(z), \forall z \in D$.

Якщо функція $w = f(z)$ є аналітичною в області D, обмеженій кусково-гладким замкнутим контуром Γ, і на самому контурі, то (теорема Коші)

$$\oint_\Gamma f(z)\,dz = 0,$$

а для $\forall z \in D$ (інтегральна формула Коші)

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i}\oint_\Gamma \frac{f(\zeta)}{\zeta - z}\,dz.$$

7. Ряди Лорана

Функція $f(z)$, однозначна і аналітична в кільці $r < |z - z_0| < R$, розкладається в цьому кільці в ряд Лорана

$$f(z) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k (z - z_0)^k,$$

де коефіцієнти c_n знаходяться за формулами

$$c_n = \frac{1}{2\pi i}\oint_\Gamma \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z_0)^{n+1}}\,dz, \;\; n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots.$$

Тут Γ – довільне коло з центром в точці z_0, що лежить в середині даного кільця.

Ряди

$$\sum_{k=-\infty}^{-1} c_k(z-z_0)^k \quad \text{і} \quad \sum_{k=0}^{\infty} c_k(z-z_0)^k$$

називаються відповідно головною частиною ряду Лорана і правильною частиною ряду Лорана.

8. Ізольовані особливі точки однозначної аналітичної функції

Точка z_0 називається нулем аналітичної функції $f(z)$ порядку n, якщо виконуються умови

$$f(z_0) = 0,\ f'(z_0) = 0,\ \ldots,\ f^{(n-1)} = 0,\ f^{(n)} \neq 0.$$

Якщо $n = 1$, то точка z_0 називається простим нулем.

Точка z_0 називається ізольованою особливою точкою функції $f(z)$, якщо функція $f(z)$ не є однозначною в точці z_0, але $f(z)$ є аналітичною в точці z_0 в деякому проколотому околі точки z_0.

Ізольована особлива точка z_0 функції $f(z)$ називається усувною особливою точкою, якщо існує скінченна границя $\lim\limits_{z\to z_0} f(z)$. Ізольована особлива точка z_0 функції $f(z)$ називається полюсом, якщо існує границя $\lim\limits_{z\to z_0} f(z) = \infty$.

Ізольована особлива точка z_0 функції $f(z)$ називається суттєво (істотно) особливою точкою, якщо не існує границя $\lim\limits_{z\to z_0} f(z)$.

Тип ізольованої особливої точки z_0 функції $f(z)$ можна визначити за розкладом функції і ряд Лорана в проколотому околі точки z_0.

Ізольована особлива точка z_0 є усувною тоді і лише тоді, коли ряд Лорана функції $f(z)$ в проколотому околі точки z_0 не містить головної частини розкладу.

Ізольована особлива точка z_0 є полюсом тоді і лише тоді, коли головна частина ряду Лорана містить скінченне число членів з від'ємними степенями різниці $(z - z_0)$, тобто $f(z) = \sum_{k=-n}^{\infty} c_k(z-z_0)^k$, $c_{-n} \neq 0$. В цьому випадку z_0 називається полюсом порядку n функції $w = f(z)$.

Ізольована особлива точка z_0 є істотно особливою тоді і лише тоді, коли головна частина ряду Лорана функції $f(z)$ в проколотому околі точки z_0 містить нескінченну кількість членів.

Класифікація ізольованих особливих точок

Тип осоливої точки z_0	Вид ряду Лорана	Границя функції
Усувна особлива точка	$f(z) = c_0 + c_1(z-z_0) + c_2(z-z_0)^2 + c_3(z-z_0)^3 + \ldots$ – правильна частина, головна частина відсутня	$\lim\limits_{z\to z_0} f(z) = c_0$

Полюс m-го порядку	$f(z)=\frac{c_{-m}}{(z-z_0)^m}+\frac{c_{-m+1}}{(z-z_0)^{m-1}}+\dots+\frac{c_{-1}}{(z-z_0)}+c_0+c_1(z-z_0)+\dots$ – m членів головної частини і правильна частина	$\lim\limits_{z\to z_0} f(z)=\infty$
Істотно особлива точка (суттєва)	$f(z)=\dots+\frac{c_{-1}}{(z-z_0)}+c_0+c_1(z-z_0)+\dots$ – нескінчеено багато членів головної частини і правильна частина	$\nexists \lim\limits_{z\to z_0} f(z)$

9. Лишки

Нехай z_0 – ізольована особлива точка функції $w=f(z)$. Величина

$$\operatorname*{res}_{z=z_0} f(z)=\frac{1}{2\pi i}\oint_\gamma f(z)\,dz$$

називається лишком функції $f(z)$ в точці z_0. Замкнутий контур інтегрування γ лежить в області аналітичності функції $f(z)$ і не містить всередині інших особливих точок функції $f(z)$. Лишок функції рівний коефіцієнту при мінус першому степені в лорановому розкладі $f(z)$ в околі $z=z_0$:

$$\operatorname*{res}_{z=z_0} f(z)=c_{-1}.$$

Лишок в усувній особливій точці рівний нулю.

Якщо точка z_0 є полюс n-го порядку функції $f(z)$, то

$$\operatorname*{res}_{z=z_0} f(z)=\frac{1}{(n-1)!}\lim_{z\to z_0}\frac{d^{n-1}}{dz^{n-1}}\left(f(z)(z-z_0)^n\right),$$

при $n=1$

$$\operatorname*{res}_{z=z_0} f(z)=\lim_{z\to z_0}\left(f(z)(z-z_0)^n\right).$$

Якщо функція $w=f(z)$ в околі точки z_0 зображається у вигляді дробу $f(z)=\dfrac{\varphi(z)}{\psi(z)}$, де $\varphi(z)$, $\psi(z)$ – аналітичні в точці z_0 функції та $\varphi(z_0)\neq 0$, $\psi(z_0)=0$, $\psi'(z)\neq 0$, то $\operatorname*{res}\limits_{z=z_0} f(z)=\dfrac{\varphi(z_0)}{\psi'(z_0)}$.

Для обчислення значення лишку функції в її істотно особливій точці потрібно користуватись означенням лишку, або розкладом функції в ряд Лорана в околі такої точки.

Основна теорема Коші про лишки. Якщо функція $w=f(z)$ є аналітичною на межі Γ області D і скрізь всередині області, за виключенням скінченного числа особливих точок $z_1,\ z_2,\ \dots,\ z_n$, то

$$\oint_\Gamma f(z)\,dz=2\pi i\sum_{k=1}^{n}\operatorname*{res}_{z=z_k} f(z). \tag{2}$$

10. Обчислення невласних інтегралів відраціональних функцій

Нехай $R(x) = \dfrac{P_k(x)}{Q_l(x)}$ – раціональна функція, де $P_k(x)$ і $Q_l(x)$ – многочлени степенів k і l, відповідно. Якщо $R(x)$ неперервна на всій дійсній осі і $l \geq k+2$, то

$$\int_{-\infty}^{\infty} R(x)\,dx = 2\pi i \sum_{\nu:\mathrm{Im} z_\nu > 0} \operatorname*{res}_{z=z_\nu} R(z),$$

де сума лишків функції $R(z)$ береться у всіх полюсах z_ν розміщених у верхній півплощині.

11. Обчислення невласних інтегралів спеціального виду

Нехай $R(x)$ – раціональна функція, $R(x) = \dfrac{P_k(x)}{Q_l(x)}$, де $P_k(x)$ і $Q_l(x)$ – многочлени степенів k і l, відповідно. Якщо $R(x)$ неперервна на всій дійсній осі і $l \geq k+1$, то

$$\int_{-\infty}^{\infty} R(x)\cos\lambda x\,dx = \mathrm{Re}\left(2\pi i \sum_{\nu:\mathrm{Im} z_\nu > 0} \operatorname*{res}_{z=z_\nu} R(z)e^{i\lambda z}\right),\ \lambda > 0,$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} R(x)\sin\lambda x\,dx = \mathrm{Im}\left(2\pi i \sum_{\nu:\mathrm{Im} z_\nu > 0} \operatorname*{res}_{z=z_\nu} R(z)e^{i\lambda z}\right),\ \lambda > 0,$$

де сума лишків функції $R(z)e^{i\lambda z}$ береться за всіма полюсами z_ν, розміщеними у верхній півплощині $\mathrm{Im} z > 0$.

12. Обчислення визначених інтегралів спеціального виду

Нехай $R(u, v)$ раціональна функція від $u = \cos t$ і $v = \sin t$, неперервна всередині проміжка інтегрування. Покладемо $z = e^{it}$, тоді

$$\cos t = \frac{1}{2}\left(z + \frac{1}{z}\right),\ \sin t = \frac{1}{2i}\left(z - \frac{1}{z}\right),\ dt = \frac{dz}{iz}$$

і

$$\int_{0}^{2\pi} R(\cos t, \sin t)\,dt = \oint_{|z|=1} F(z)\,dz. \tag{3}$$

Контурний інтеграл в правій частині (3) обчислюється за формулою (2), де сума лишків функції $F(z)$ береться по всіх особливих точках, що лежать в області $|z| < 1$.

13. Перетворення Лапласа

Оригіналом називається функція $f(t)$ дійсного аргумента t, яка задовольняє умови:

1) $f(t)$ – інтегровна на довільному скінченному інтервалі осі t;
2) $f(t) = 0$, $\forall t < 0$;
3) $f(t)$ зростає не швидше показникової функції, тобто існують такі M і S, що $|f(t)| \leq Me^{St}$, $\forall t$.

Зображенням функції $f(t)$ називається функція $F(p)$ комплексного змінного $p = S + i\tau$, що визначається рівністю

$$F(p) = \int_0^{\infty} e^{-pt} f(t)\,dt \quad \text{(перетворення Лапласа).}$$

Те, що $F(p)$ є зображенням $f(t)$ символічно записують так $f(t) \doteqdot F(p)$.

Функція $F(p)$ визначена в півплощині $\operatorname{Re} p = S > S_0$ і є в цій півплощині аналітичною функцією.

Властивості перетворення Лапласа

1. Лінійність	$C_1 f_1(t) + C_2 f_2(t) \to C_1 F_1(p) + C_2 F_2(p)$
2. Подібність	$f(\alpha t) \to \dfrac{1}{\alpha} F\left(\dfrac{p}{\alpha}\right),\ \alpha > 0$
3. Диференціювання оригіналу	$f'(t) \to pF(p) - f(0)$ $f''(t) \to p^2 F(p) - pf(0) - f'(0)$ $\ldots$ $f^{(n)}(t) \to p^n F(p) - p^{n-1} f(0) - \ldots - f^{(n-1)}(0)$
4. Диференціювання зображення	$F'(p) \to -tf(t)$ $F''(p) \to t^2 f(t)$ $\ldots$ $F^{(n)}(p) \to (-t)^n f(t)$
5. Інтегрування оригіналу	$\int_0^t f(\tau)\,d\tau \to \dfrac{F(p)}{p}$
6. Інтегрування зображення	$\int_p^{\infty} F(p)\,dp \to \dfrac{f(t)}{t}$
7. Запізнення оригіналу	$f(t-a)\eta(t-a) \to e^{-pa} F(p)$
8. Зміщення зображення	$F(p-\alpha) \to e^{\alpha t} f(t)$
9. Згортка-добуток зображень	$f_1(t) * f_2(t) \to F_1(p) \cdot F_2(p)$

	$\int_0^t f_1(\tau) f_2(t-\tau)\,d\tau \to F_1(p)\cdot F_2(p)$
10. Інтеграл Дюамеля	$pF(p)G(p) \to \int_0^t f'(\tau) g(t-\tau)\,d\tau + f(0)g(t)$

14. Формули відповідності

Таблиця зображень основних функцій

$f(t)$	$F(p)$
$1(t)=\eta(t)$	$\dfrac{1}{p}$
$e^{\alpha t}$	$\dfrac{1}{p-\alpha}$
t^n	$\dfrac{n!}{p^{n+1}}$
$\sin\beta t$	$\dfrac{\beta}{p^2+\beta^2}$
$\cos\beta t$	$\dfrac{p}{p^2+\beta^2}$
$\mathrm{sh}\beta t$	$\dfrac{\beta}{p^2-\beta^2}$
$\mathrm{ch}\beta t$	$\dfrac{p}{p^2-\beta^2}$
$\sin(t-\tau)\eta(t-\tau),\ \tau>0$	$\dfrac{e^{-\tau p}}{p^2+1}$
$\cos(t-\tau)\eta(t-\tau),\ \tau>0$	$\dfrac{pe^{-\tau p}}{p^2+1}$

Зразок розв'язання варіанту типової розрахункової роботи

Завдання 1. Звести до тригонометричної форми комплексне число

$$z = 1 + \cos\frac{\pi}{9} + i\sin\frac{\pi}{9}.$$

Розв'язання. Знайдемо модуль z за формулою
$|z| = \sqrt{(1+\cos\frac{\pi}{9})^2 + \sin^2\frac{\pi}{9}} = \sqrt{1+2\cos\frac{\pi}{9}+1} = \sqrt{2(1+\cos\frac{\pi}{9})} =$
$= \sqrt{4\cos^2\frac{\pi}{18}} = 2\cos\frac{\pi}{18}.$

Оскільки число z знаходиться у I чверті $(1+\cos\frac{\pi}{9} > 0,\ \sin\frac{\pi}{9} > 0)$, то його аргумент знаходиться за формулою
$\arg z = \operatorname{arctg}\left(\dfrac{\sin\frac{\pi}{9}}{1+\cos\frac{\pi}{9}}\right) = \operatorname{arctg}(\operatorname{tg}\frac{\pi}{18}) = \frac{\pi}{18}.$

Відповідь: $z = 2\cos\frac{\pi}{18}(\cos\frac{\pi}{18} + i\sin\frac{\pi}{18}).$

Завдання 2. Подати в алгебраїчній формі комплексне число

$$\left(\frac{-\sqrt{3}+i}{\sqrt{2}-i\sqrt{2}}\right)^{20}.$$

Розв'язання. Запишемо число $i-\sqrt{3} = z_1$ в тригонометричній формі. Його модуль дорівнює $|z_1| = \sqrt{3+1} = 2$.
Його аргумент знаходимо з системи
$$\begin{cases} \cos\varphi_1 = -\frac{\sqrt{3}}{2} \\ \sin\varphi_1 = \frac{1}{2}, \end{cases}$$
тобто $\varphi_1 = \arg z_1 = \frac{5\pi}{6}$. Таким чином, $z_1 = i-\sqrt{3} = 2(\cos\frac{5\pi}{6} + i\sin\frac{5\pi}{6})$.

Модуль числа $\sqrt{2}-i\sqrt{2} = z_2$ дорівнює $|z_2| = \sqrt{2+2} = 2$.
Його аргумент знаходиться з системи
$$\begin{cases} \cos\varphi_2 = \frac{\sqrt{2}}{2} \\ \sin\varphi_2 = -\frac{\sqrt{2}}{2}, \end{cases}$$
тобто $\varphi_2 = \arg z_2 = -\frac{\pi}{4}$. Таким чином, $z_2 = 2(\cos(\frac{\pi}{4}) + i\sin(-\frac{\pi}{4}))$.

Виконаємо ділення комплексних чисел в тригонометричній формі
$\frac{z_1}{z_2} = \frac{2}{2}\left(\cos(\frac{5\pi}{6} - (-\frac{\pi}{4})) + i\sin(\frac{5\pi}{6} - (-\frac{\pi}{4}))\right) = \cos(\frac{5\pi}{6}+\frac{\pi}{4}) + i\sin(\frac{5\pi}{6}+\frac{\pi}{4}) =$
$= \cos\frac{13\pi}{12} + i\sin\frac{13\pi}{12}.$

Степінь цього числа знаходимо за формулою Муавра:
$\left(\frac{z_1}{z_2}\right)^{20} = 1^{20}(\cos\frac{13\cdot 20\pi}{12} + i\sin\frac{13\cdot 20\pi}{12}) = \cos\frac{65\pi}{3} + i\sin\frac{65\pi}{3} = \cos(21\pi + \frac{2\pi}{3}) +$
$+ i\sin(21\pi + \frac{2\pi}{3}) = -\cos\frac{2\pi}{3} - i\sin\frac{2\pi}{3} = \frac{1}{2} - \frac{i\sqrt{3}}{2}.$

Відповідь: $\left(\frac{-\sqrt{3}+i}{\sqrt{2}-i\sqrt{2}}\right)^{20} = \frac{1}{2} - \frac{i\sqrt{3}}{2}.$

<u>Завдання 3.</u> Знайти всі значення кореня та побудувати їх

$$\sqrt[3]{-27i}.$$

<u>Розв'язання.</u> Запишемо число $z = -27i$ в тригонометричній формі

$$-27i = 27(\cos(-\tfrac{\pi}{2}) + i\sin(-\tfrac{\pi}{2})).$$

Корінь третього степеня з даного числа має три різних значення, які знаходяться за формулами

$\omega_0 = \sqrt[3]{27}(\cos(-\frac{\pi}{6}) + i\sin(-\frac{\pi}{6}))$,

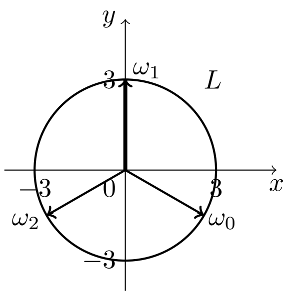
$\omega_1 = \sqrt[3]{27}(\cos(-\frac{\pi}{6} + \frac{2\pi}{3}) + i\sin(-\frac{\pi}{6} + \frac{2\pi}{3}))$,

$\omega_2 = \sqrt[3]{27}(\cos(-\frac{\pi}{6} + \frac{4\pi}{3}) + i\sin(-\frac{\pi}{6} + \frac{4\pi}{3}))$.

<u>Відповідь:</u> $\omega_0 = 3(\cos(-\frac{\pi}{6}) + i\sin(-\frac{\pi}{6}))$,

$\omega_1 = 3(\cos\frac{\pi}{2} + i\sin\frac{\pi}{2})$,

$\omega_2 = 3(\cos\frac{7\pi}{6} + i\sin\frac{7\pi}{6})$.



<u>Завдання 4.</u> Зобразити множину точок

$$\{z \in \mathbb{C} \mid |\mathrm{Re}\, z| \le 1,\ |\mathrm{Im}\, z| < 2\}.$$

<u>Розв'язання.</u> Якщо $z = x + iy$, то $\mathrm{Re}\, z = x,\ \mathrm{Im}\, z = y$. Розв'язуючи систему нерівностей

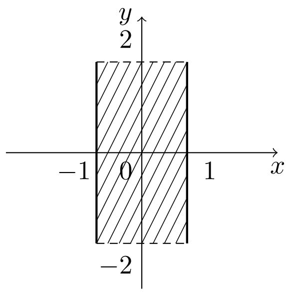
$$\begin{cases} |x| \le 1 \\ |y| < 2, \end{cases}$$

одержимо множину точок

$$\begin{cases} -1 \le x \le 1 \\ -2 < y < 2, \end{cases}$$

яка є перетином двох смуг, тобто прямокутник.

Відповідь:



Зауваження. Сторони прямокутника $x = 1,\ x = -1$ належать нашій множині, сторони $y = 2,\ y = -2$ – не належать.

Завдання 5. Визначити вид кривої

$$z = t^2 - 2t + 3 + i(t^2 - 2t + 1).$$

Розв'язання. Запишемо криву в параметричному вигляді

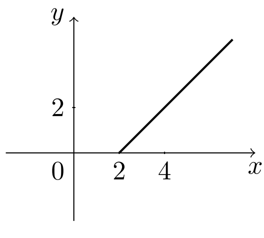
$$\begin{cases} x = t^2 - 2t + 3 \\ y = t^2 - 2t + 1. \end{cases}$$

Віднявши від першої рівності другу, одержимо рівняння прямої

$$x - y = 2.$$

Оскільки $y = (t-1)^2 \geq 0$, то для $\forall\, t \in \mathbb{R}$ маємо промінь $y = x - 2,\ y \geq 0$.

Відповідь:



Завдання 6. Побудувати лінію, що задана співвідношенням

$$|z + 2i| = |z - 2i|$$

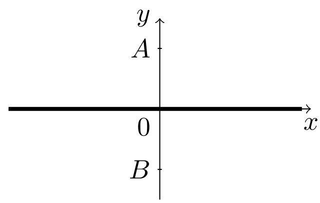
Розв'язання. Якщо $z = x + iy$, то $|z + 2i| = \sqrt{x^2 + (y+2)^2}$, $|z - 2i| = \sqrt{x^2 + (y-2)^2}$.

Підставимо це в рівність, піднесемо до квадрату, одержимо

$$x^2 + y^2 + 4y + 4 = x^2 + y^2 - 4y + 4,$$

$$y = 0.$$

Відповідь: вісь Ox.



Зауваження. Шукана лінія є серединний перпендикуляр до відрізка з кінцями у точках $2i$ та $-2i$, або у точках $A(0;2)$ та $B(0;-2)$.

Завдання 7. Знайти всі значення функцій

а) $\sin \pi i$.

Розв'язання. Підставимо в формулу Ейлера
$$\sin z = \frac{1}{2i}(e^{iz} - e^{-iz})$$
замість z число πi. Одержимо

$\sin \pi i = \dfrac{1}{2i}(e^{-\pi} - e^{\pi}) = \dfrac{i}{2i^2}(e^{-\pi} - e^{\pi}) = -\dfrac{i}{2}(e^{-\pi} - e^{\pi}) = \dfrac{i}{2}(e^{\pi} - e^{-\pi})$.

Відповідь: $\sin \pi i = i \operatorname{sh} \pi$.

б) $\ln i$; $\operatorname{Ln} i$.

Розв'язання. Скористаємось формулою
$$\ln z = \ln|z| + i \arg z.$$
Одержимо

$\ln i = \ln|i| + i \arg i = \ln 1 + i \cdot \dfrac{\pi}{2} = \dfrac{\pi i}{2}$.

Оскільки $\operatorname{Ln} z = \ln z + 2\pi k i,\ k = 0,\ \pm 1,\ \pm 2, ...,$ то $\operatorname{Ln} i = \dfrac{\pi i}{2} + 2\pi k i,\ k \in \mathbb{Z}$.

Відповідь: $\ln i = \dfrac{1}{2}\pi i,\ \operatorname{Ln} i = \dfrac{1}{2}\pi i + 2\pi k i,\ k \in \mathbb{Z}$.

в) $\operatorname{Arcsin} i$.

Розв'язання. Скористаємось формулою
$$\operatorname{Arcsin} z = -i \operatorname{Ln}(iz \pm \sqrt{1 - z^2}).$$
Одержимо

$\operatorname{Arcsin} i = -i \operatorname{Ln}(i^2 \pm \sqrt{1 - i^2}) = -i \operatorname{Ln}(-1 \pm \sqrt{2})$.

Таким чином, маємо дві множини чисел
$$\left[\begin{array}{l} -i \operatorname{Ln}(-1 - \sqrt{2}) = -i(\ln(1 + \sqrt{2}) + \pi i + 2\pi k i),\ k \in \mathbb{Z}, \\ -i \operatorname{Ln}(-1 + \sqrt{2}) = -i(\ln(\sqrt{2} - 1) + 0 \cdot i + 2\pi k i),\ k \in \mathbb{Z}. \end{array}\right.$$

Відповідь: числова множина

$\{-i \ln(1 + \sqrt{2}) + \pi + 2\pi k;\ -i \ln(\sqrt{2} - 1) + 2\pi k\},\ k \in \mathbb{Z}$.

г) $\operatorname{ch}\left(1 + i \cdot \dfrac{\pi}{4}\right)$.

Розв'язання. З формули $\operatorname{ch} z = \cos iz$ випливає, що

$$\operatorname{ch}\left(1+i\cdot\frac{\pi}{4}\right)=\cos\left(i+i^2\cdot\frac{\pi}{4}\right)=\cos\left(i-\frac{\pi}{4}\right)=\cos i\cos\frac{\pi}{4}+\sin i\sin\frac{\pi}{4}=$$
$$=\frac{\sqrt{2}}{2}(\cos i+\sin i).$$

Оскільки $\cos z=\operatorname{ch} iz$, $\sin z=-i\operatorname{sh} iz$, то $\cos i=\operatorname{ch} i^2=\operatorname{ch}(-1)=\operatorname{ch}1$, $\sin i=-i\operatorname{sh}(-1)=i\operatorname{sh}1$.

Відповідь: $\operatorname{ch}\left(1+\frac{\pi i}{4}\right)=\frac{\sqrt{2}}{2}(\operatorname{ch}1+i\operatorname{sh}1)$.

Завдання 8. Перевірити, чи є функція аналітичною, якщо так, знайти її похідну

$$f(z)=z\bar{z}.$$

Розв'язання. Якщо $z=x+iy$, то $\bar{z}=x-iy$, таким чином $f(z)=x^2+y^2$. Дана функція $f(z)$ має дійсну частину $u=x^2+y^2$ та уявну частину $v\equiv 0$. Перевіримо виконання першої з умов Коші-Рімана, а саме

$$\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{\partial v}{\partial y}.$$

Одержимо $\frac{\partial u}{\partial x}=2x,\ \frac{\partial v}{\partial y}=0,\ x=0.$

Перевіримо виконання другої умови Коші-Рімана: $\frac{\partial v}{\partial x}=-\frac{\partial u}{\partial y};\ 0=-2y,\ y=0.$

Таким чином, функція диференційовна тільки в точці $(0;0)$.

Відповідь: функція не є аналітичною в жодній точці комплексної площини.

Завдання 9. Відновити аналітичну функцію, якщо $\operatorname{Re} f(z)=2\sin x\operatorname{ch} y-x,\ f(0)=0.$

Розв'язання. Перевіримо, що задана функція є гармонійною. Позначимо через $u=2\sin x\operatorname{ch} y-x$. Тоді

$$\frac{\partial u}{\partial x}=2\cos x\operatorname{ch} y-1,\quad \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}=-2\sin x\operatorname{ch} y,$$
$$\frac{\partial u}{\partial y}=2\sin x\operatorname{sh} y,\quad \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=2\sin x\operatorname{ch} y.$$

Оскільки $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\equiv 0$, то функція $u(x;y)$ дійсно є гармонійною.

З умов Коші-Рімана одержимо, що

$$\frac{\partial v}{\partial y}=\frac{\partial u}{\partial x}=2\cos x\operatorname{ch} y-1,$$
$$\frac{\partial v}{\partial x}=-\frac{\partial u}{\partial y}=-2\sin x\operatorname{sh} y.$$

Невідому функцію $v(x;y)$ знайдемо за допомогою криволінійного інтеграла другого роду

$$v(x;y)=\int\limits_{(0;0)}^{(x;y)}\frac{\partial v}{\partial x}\,dx+\frac{\partial v}{\partial y}\,dy+C=\int\limits_{(0;0)}^{(x;y)}(2\cos x\operatorname{ch}y-1)\,dy-2\sin x\operatorname{sh}y\,dx+C.$$

Оскільки інтеграл не залежить від шляху інтегрування, проінтегруємо по ламаній ABC, де $A(0;0),\ B(x;0),\ C(x;y)$:

$$v(x;y)=-\int\limits_0^x 2\sin x\operatorname{sh}0dx+\int\limits_0^y(2\cos x\operatorname{ch}y-1)dy+C=-0+(2\cos x\operatorname{sh}y-y)|_0^y+$$
$$+C=2\cos x\operatorname{sh}y-y+C.$$

Таким чином,

$f(z)=u+iv=2\sin x\operatorname{ch}y-x+i(2\cos x\operatorname{sh}y-y+C).$

Підставимо в цю рівність $x=0,\ y=0,\ f(z)=0:\ 0=0-0+i(0-0+C)\Rightarrow C=0.$

Відповідь: $f(z)=2\sin x\operatorname{ch}y-x+i(2\cos x\operatorname{sh}y-y)=2\sin z-z.$

Завдання 10. Знайти коефіцієнт розтягу та кут повороту в точці z_0 при відображенні комплексної площини, яке задається функцією

$$f(z)=e^z,\ z_0=-1-\frac{\pi i}{4}.$$

Розв'язання. Знайдемо похідну функції в заданій точці

$f'(z)=e^z,\ f'(z_0)=e^{-1-\frac{\pi i}{4}}=e^{-1}(\cos(-\frac{\pi}{4})+i\sin(-\frac{\pi}{4})).$

Як відомо, коефіцієнт розтягу

$r=|f'(z_0)|=e^{-1},$

а кут повороту

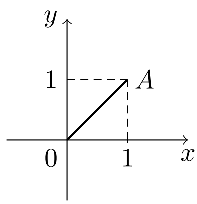
$\theta=\arg f'(z_0)=-\frac{\pi}{4}.$

Відповідь: $r=e^{-1},\ \theta=-\frac{\pi}{4}.$

Завдання 11. Обчислити інтеграл

$$\int\limits_L e^{|z|^2}z\,dz,\ \text{де}\ L:\ y=x,\ 0\to 1+i.$$

Розв'язання. Шлях інтегрування L – це відрізок OA:



1-й спосіб. Оскільки $|z|^2=x^2+y^2,\ dz=dx+idy$, одержимо

$$\int\limits_L e^{|z|^2} z\,dz = \int\limits_L e^{x^2+y^2}(x+iy)(dx+idy).$$

Підставимо в інтеграл $y = x,\ dy = dx$, одержимо

$$\int\limits_L e^{|z|^2} z\,dz = \int\limits_0^1 e^{2x^2} x(1+i)(1+i)dx = (1+i)^2 \cdot \frac{1}{4}\int\limits_0^1 e^{2x^2}\ d(2x^2) =$$

$$= \frac{1}{4}(1+i)^2 \cdot e^{2x^2}|_0^1 = \frac{1}{4}(1+i)^2(e^2-1) = \frac{1}{4}(1+2i-1)(e^2-1).$$

<u>2-й спосіб.</u> Якщо крива L задана параметрично $z = x(t)+iy(t),\ \alpha \le t \le \beta$, то $\int\limits_L f(z)\,dz = \int\limits_\alpha^\beta f(z(t))z'(t)\,dt$. Отже, $L:\ \ z = t+it,\ x = t,\ y = t,\ 0 \le t \le 1,\ z'(t) = 1+i$ та $|z| = \sqrt{t^2+t^2} \Rightarrow |z|^2 = 2t^2$, тому

$$\int\limits_L e^{|z|^2} z\,dz = \int\limits_0^1 e^{2t^2}(t+it)(1+i)\,dt = (1+i)^2\int\limits_0^1 e^{2t^2} t\,dt = \frac{(1+i)^2}{4}e^{2t^2}\,|_0^1 =$$

$$= \frac{1}{4}(1+i)^2(e^2-1) = \frac{i}{2}(e^2-1).$$

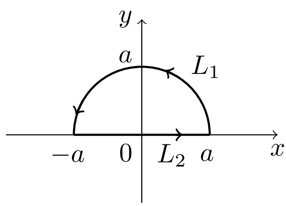
<u>Відповідь:</u> $\dfrac{i}{2}(e^2-1)$.

<u>**Завдання 12.**</u> Обчислити інтеграл

$$\oint\limits_L e^{|z|^2} z\,dz$$

по контуру L, який складається з верхнього півкола $|z| = a$ та відрізка дійсної осі з обходом контуру проти годинникової стрілки.

<u>Розв'язання.</u> Нехай $L = L_1 \cup L_2$, де L_1 – півколо, а L_2 – відрізок дійсної осі.



На кривій L_1 : $\begin{cases} x = a\cos t \\ y = a\sin t, \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} dx = -a\sin t\,dt \\ dy = a\cos t\,dt. \end{cases}$ Тоді

$$\int\limits_{L_1} e^{|z|^2} z\,dz = \int\limits_0^\pi e^{a^2(\cos^2 t+\sin^2 t)}(a\cos t + ai\sin t)(-a\sin t + ai\cos t)\,dt =$$

$$= e^{a^2}\int\limits_0^\pi(-\cos t\sin t + i\cos^2 t - i\sin^2 t + i^2\sin t\cos t)a^2\,dt = a^2e^{a^2}\int\limits_0^\pi(-2\sin t\cos t +$$

$+i\cos 2t)dt = a^2 e^{a^2}\left(2\int\limits_0^{\pi}\cos t\, d(\cos t) + i\int\limits_0^{\pi}\cos 2t\, dt\right) = a^2e^{a^2}(\cos^2 t + \frac{i}{2}\sin 2t)\,|_0^{\pi} =$
$= 0.$

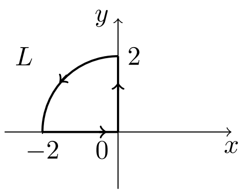
На кривій $L_2: \ y = 0$, таким чином

$$\int\limits_{L_2} f(z)\,dz = \int\limits_{-1}^{1} e^{x^2} x\, dx = \frac{1}{2}\int\limits_{-1}^{1} e^{x^2}\, d(x^2) = \frac{1}{2}e^{x^2}|_{-1}^{1} = 0,$$

$$\int\limits_{L} f(z)\,dz = \int\limits_{L_1} f(z)\,dz + \int\limits_{L_2} f(z)\,dz = 0 + 0 = 0.$$

Відповідь: 0.

Завдання 13. Обчислити інтеграл $\oint\limits_L |z|z\,dz$, де контур L задано графічно



Розв'язання. Якщо $z = x + iy$, то $|z| = \sqrt{x^2+y^2}$, $dz = dx + idy$.
Розіб'ємо контур L на три частини: L_1 – це відрізок OA, де $O(0;0)$, $A(0;2)$; L_2 – це чверть кола $|z| = 2$, що знаходиться в II чверті; L_3 – це відрізок BO, де $B(-2;0)$. Тоді

$$\int\limits_{L_1} |z|z\,dz = i^2\int\limits_0^2 \sqrt{y^2}\cdot y\,dy = -\frac{1}{3}y^3|_0^2 = -\frac{8}{3}.$$

$$\int\limits_{L_2} |z|z\,dz = \int\limits_{\pi/2}^{\pi} 2(2\cos t + 2i\sin t)(-2\sin t + 2i\cos t)\,dt,$$

тому що коло можна задати параметрично

$$\begin{cases} x = 2\cos t \\ y = 2\sin t, \end{cases} \text{ тоді } \begin{cases} dx = -2\sin t\,dt \\ dy = 2\cos t\,dt. \end{cases}$$

Таким чином,

$$\int\limits_{L_2} |z|zdz = \int\limits_{\pi/2}^{\pi} 8(-\cos t\sin t + i\cos^2 t - i\sin^2 t + i^2\sin t\cos t)dt = -16\int\limits_{\pi/2}^{\pi}\cos t\sin tdt +$$
$$+ i\int\limits_{\pi/2}^{\pi}\cos 2t\,dt = 16\int\limits_{\pi/2}^{\pi}\cos t\, d(\cos t) + \frac{i}{2}\sin 2t|_{\pi/2}^{\pi} = 8\cos^2 t|_{\pi/2}^{\pi} + 0 = 8.$$

$$\int\limits_{L_3} |z|z\,dz = \int\limits_{-2}^{0} \sqrt{x^2}\cdot x\,dx = -\frac{x^3}{3}\Big|_{-2}^{0} = -\frac{8}{3}.$$

Оскільки $\int\limits_{L} f(z)\,dz = \int\limits_{L_1} f(z)\,dz + \int\limits_{L_2} f(z)\,dz + \int\limits_{L_3} f(z)\,dz$, то

$$\oint\limits_{L} |z|z\,dz = -\frac{8}{3} + 8 - \frac{8}{3} = \frac{8}{3}.$$

Відповідь: $\frac{8}{3}$.

Завдання 15. Обчислити інтеграл

$$\int\limits_{0}^{i} z\cos z\,dz.$$

Розв'язання. Перевіримо, що функція $\omega = z\cos z$ є аналітичною. Знайдемо $\operatorname{Re} f(z)$, $\operatorname{Im} f(z)$:

$\omega = (x+iy)\left(\frac{1}{2}e^{iz} + \frac{1}{2}e^{-iz}\right) = \frac{1}{2}(x+iy)(e^{-y}\cos x + ie^{-y}\sin x + e^{y}\cos x - -ie^{y}\sin x) = (x+iy)\left(\cos x\frac{e^{y}+e^{-y}}{2} - i\sin x\frac{e^{y}-e^{-y}}{2}\right) = (x+iy)(\cos x\operatorname{ch} y - -i\sin x\operatorname{sh} y) = x\cos x\operatorname{ch} y - ix\sin x\operatorname{sh} y + iy\cos x\operatorname{ch} y + y\sin x\operatorname{sh} y.$

Якщо $\omega = u + iv$, то маємо

$$\begin{cases} u = x\cos x\operatorname{ch} y + y\sin x\operatorname{sh} y = \operatorname{Re} f(z) \\ v = y\cos x\operatorname{ch} y - x\sin x\operatorname{sh} y = \operatorname{Im} f(z). \end{cases}$$

Оскільки ці функції є диференційовними, перевіримо виконання умов Коші-Рімана

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \cos x\operatorname{ch} y + y\cos x\operatorname{sh} y - x\sin x\operatorname{ch} y,$$

$$\frac{\partial v}{\partial y} = \cos x\operatorname{ch} y + y\cos x\operatorname{sh} y - x\sin x\operatorname{ch} y,$$

$$\frac{\partial u}{\partial y} = x\cos x\operatorname{sh} y + \sin x\operatorname{sh} y + y\sin x\operatorname{ch} y,$$

$$\frac{\partial v}{\partial x} = -y\sin x\operatorname{ch} y - \sin x\operatorname{sh} y - x\cos x\operatorname{sh} y.$$

Як бачимо, $\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y}$, $\frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x}$ на всій комплексній площині, отже наша функція є аналітичною на всій комплексній площині. Таким чином,

$$\int\limits_{0}^{i} z\cos z\,dz = F(i) - F(0),$$

де $F(z)$ є первісною функції $z\cos z$. Знайдемо первісну методом інтегрування частинами

$$\int z\cos z\,dz = \int z\,d(\sin z) = z\sin z - \int \sin z\,dz = z\sin z + \cos z = F(z).$$

Отже,

$$\int_0^i z\cos z\,dz = i\sin i + \cos i - 0 - \cos 0 = i\cdot i\,\mathrm{sh}\,1 + \mathrm{ch}\,1 - 1 = \mathrm{ch}\,1 - \mathrm{sh}\,1 - 1 =$$

$$= \frac{1}{2}(e+e^{-1}) - \frac{1}{2}(e-e^{-1}) - 1 = e^{-1} - 1,$$

оскільки $\sin i = i\,\mathrm{sh}\,1,\ \cos i = \mathrm{ch}\,1$.

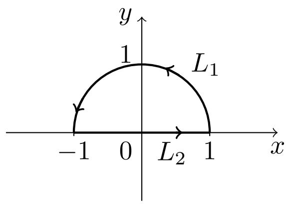
Відповідь: $e^{-1} - 1$.

Завдання 16. Обчислити інтеграл

$$\int_L z|z|\,dz,\ \text{де } L:\ \{|z| = 1,\ Re\,z \geq 0\}.$$

Розв'язання. Якщо $z = x + iy$, то $|z| = \sqrt{x^2+y^2},\ dz = dx + idy$.

Розіб'ємо L на дві частини: L_1 – це півколо $|z| = 1$, яке лежить у верхній півплощині, L_2 – це відрізок AB, де $A(-1;0),\ B(1;0)$.



Додатнім вважається обхід проти годинникової стрілки. Таким чином,

$$\int_{L_1} z|z|\,dz = \int_0^{\pi} (\cos t + i\sin t)(-\sin t + i\cos t)\,dt,$$

тому що коло можна задати параметрично

$$\begin{cases} x = \cos t \\ y = \sin t, \end{cases} \text{ тоді } \begin{cases} dx = -\sin t\,dt \\ dy = \cos t\,dt. \end{cases}$$

Отже,

$$\int_{L_1} z|z|\,dz = \int_0^{\pi} (-\cos t\sin t + i\cos^2 t - i\sin^2 t + i^2\sin t\cos t)\,dt =$$

$$= -2\int_0^{\pi} \sin t\,d(\sin t) + i\int_0^{\pi} \cos 2t\,dt = 0.$$

$$\int_{L_2} z|z|\,dz = \int_{-1}^{1} x\sqrt{x^2}\,dx = \int_{-1}^{1} x|x|\,dx = 0, \text{ оскільки функція } x|x| \text{ є непарною.}$$

$$\int\limits_L f(z)\,dz = \int\limits_{L_1} f(z)\,dz + \int\limits_{L_2} f(z)\,dz = 0 + 0 = 0.$$

Відповідь: 0.

Завдання 17. Знайти радіус збіжності ряду

$$\sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{z}{1-i}\right)^n .$$

Розв'язання. Коефіцієнти цього степеневого ряду мають вигляд $a_n = \dfrac{1}{(1-i)^n}$.

За теоремою Коші-Адамара $R = \left(\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|}\right)^{-1}$, якщо ця границя існує.

Отже, $R = \lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{|1-i|^n} = |1-i| = \sqrt{1+1} = \sqrt{2}$.

Відповідь: $R = \sqrt{2}$.

Завдання 18(1). Знайти всі лоранівські розвинення функції

$$f(z) = \frac{15z+450}{225z + 15z^2 - 2z^3},\ z_0 = 0.$$

Розв'язання. Представимо функцію у вигляді

$f(z) = \dfrac{15z+450}{-z(2z^2-15z-225)} = \dfrac{15z+450}{-z(z-15)(2z+15)} = \dfrac{A}{z} + \dfrac{B}{z-15} + \dfrac{C}{2z+15}$.

Зведемо останню суму до спільного знаменника, прирівняємо чисельники:

$-(15z+450) \equiv A(z-15)(2z+15) + Bz(2z+15) + Cz(z-15)$.

Підставимо в ліву та праву частини значення $z = 0,\ z = 15,\ z = -\frac{15}{2}$, одержимо три рівності

$$\begin{cases} -450 = -225A, \\ -(225+450) = 15\cdot 45B, \\ -(-\dfrac{225}{2} + 450) = \dfrac{15}{2}\cdot\dfrac{45}{2}C. \end{cases}$$

Таким чином,

$A = 2,\ B = -1,\ C = -2.$

Підставимо ці значення в функцію

$$f(z) = \frac{2}{z} - \frac{1}{z-15} - \frac{2}{2z+15}.$$

1) Нехай $0 < |z| < \dfrac{15}{2}$, тоді

$f(z) = \dfrac{2}{z} + \dfrac{1}{15}\cdot\dfrac{1}{1-\frac{z}{15}} - \dfrac{2}{15}\cdot\dfrac{1}{1+\frac{2z}{15}} = \dfrac{2}{z} + \dfrac{1}{15}\sum\limits_{n=0}^{\infty}\left(\dfrac{z}{15}\right)^n - \dfrac{2}{15}\sum\limits_{n=0}^{\infty}(-1)^n\left(\dfrac{2z}{15}\right)^n =$

$= \dfrac{2}{z} + \sum\limits_{n=0}^{\infty}\left(\dfrac{1}{15^{n+1}} - (-1)^n\left(\dfrac{2}{15}\right)^{n+1}\right)z^n.$

2) Нехай $\dfrac{15}{2} < |z| < 15$, тоді

$$f(z)=\frac{2}{z}+\frac{1}{15}\cdot\frac{1}{1-\frac{z}{15}}-\frac{1}{z}\cdot\frac{1}{1+\frac{15}{2z}}=\frac{2}{z}+\sum_{n=0}^{\infty}\frac{z^n}{15^{n+1}}-\frac{1}{z}\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\left(\frac{15}{2z}\right)^n=$$
$$=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{z^n}{15^{n+1}}+\frac{1}{z}-\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\left(\frac{15}{2}\right)^n\frac{1}{z^{n+1}}.$$

3) Нехай $|z|>15$, тоді

$$f(z)=\frac{2}{z}-\frac{1}{z}\cdot\frac{1}{1-\frac{15}{z}}-\frac{1}{z}\cdot\frac{1}{1+\frac{15}{2z}}=\frac{2}{z}-\frac{1}{z}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{15}{z}\right)^n-\frac{1}{z}\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\left(\frac{15}{2z}\right)^n=$$
$$=-\sum_{n=1}^{\infty}\left(15^n+(-1)^n\left(\frac{15}{2}\right)^n\right)\frac{1}{z^{n+1}}.$$

Зауваження. Ми декілька разів скористалися формулою

$$\frac{1}{1-z}=\sum_{n=0}^{\infty}z^n,\ \text{якщо } |z|<1.$$

Скористаємося нею і при розв'язанні наступного завдання.

Завдання 18(2). Знайти всі лоранівські розвинення функції

$$f(z)=\frac{2z}{z^2-4},\ z_0=3-2i.$$

Розв'язання. Запишемо функцію у вигляді суми

$$f(z)=\frac{A}{z-2}+\frac{B}{z+2}.$$

Приведемо праву частину до спільного знаменника і прирівняємо чисельники

$$2z\equiv A(z+2)+B(z-2).$$

Підставимо у ліву та праву частини

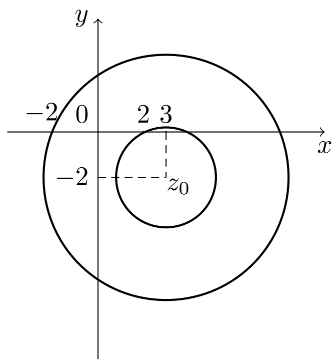
$z=2:\ 4=4A,$

$z=-2:\ -4=-4B.$

Отже, $A=1,\ B=1$. Таким чином,

$$f(z)=\frac{1}{z-2}+\frac{1}{z+2}.$$

Розглянемо два кола з чентром у точці $z_0=3-2i$, які проходять через точки $z_1=2$ та $z_2=-2$. Вони утворюють три області: 1) $|z-3+2i|<\sqrt{5}$; 2) $\sqrt{5}<|z-3+2i|<\sqrt{29}$; 3) $|z-3+2i|>\sqrt{29}$.



Розглянемо кожну область окремо.

1) Нехай $|z-3+2i|<\sqrt{5}$, тоді

$$f(z)=\frac{1}{(z-3+2i)+(1-2i)}+\frac{1}{(z-3+2i)+(5-2i)}=$$

$$=\frac{1}{1-2i}\cdot\frac{1}{1+(z-3+2i)/(1-2i)}+\frac{1}{5-2i}\cdot\frac{1}{1+(z-3+2i)/(5-2i)}=$$

$$=\frac{1}{1-2i}\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\left(\frac{z-3+2i}{1-2i}\right)^n+\frac{1}{5-2i}\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\left(\frac{z-3+2i}{5-2i}\right)^n=$$

$$=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n((1-2i)^{-n-1}+(5-2i)^{-n-1})(z-3+2i)^n.$$

2) Нехай $\sqrt{5}<|z-3+2i|<\sqrt{29}$, тоді

$$f(z)=\frac{1}{z-3+2i}\cdot\frac{1}{1+(1-2i)/(z-3+2i)}+\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{(z-3+2i)^n}{(5-2i)^{n+1}}=$$

$$=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{(1-2i)^n}{(z-3+2i)^{n+1}}+\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{(z-3+2i)^n}{(5-2i)^{n+1}}.$$

3) Нехай $|z-3+2i|>\sqrt{29}$, тоді

$$f(z)=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{(1-2i)^n}{(z-3+2i)^{n+1}}+\frac{1}{z-3+2i}\cdot\frac{1}{1+(5-2i)/(z-3+2i)}=$$

$$=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{(1-2i)^n}{(z-3+2i)^{n+1}}+\frac{1}{z-3+2i}\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\left(\frac{5-2i}{z-3+2i}\right)^n=$$

$$=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n((1-2i)^n+(5-2i)^n)(z-3+2i)^{-n-1}.$$

Завдання 18(3). Розвинути в ряд функцію $f(z)=z\sin\dfrac{\pi z}{z-a}$ в околі точки $z_0=a$.

Розв'язання. Скористаємося формулою

$$\sin z=z-\frac{z^3}{3!}+...+(-1)^n\frac{z^{2n+1}}{(2n+1)!}+...,\ z\in\mathbb{C}.$$

Тоді

$$\sin\frac{\pi z}{z-a}=\sin\frac{\pi z-\pi a+\pi a}{z-a}=\sin\left(\pi+\frac{\pi a}{z-a}\right)=-\sin\frac{\pi a}{z-a}=$$

$$=-\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{(\pi a)^{2n+1}}{(z-a)^{2n+1}(2n+1)!}.$$

Запишемо $f(z)$ у вигляді

$$f(z)=(z-a+a)\sin\frac{\pi z}{z-a}=(z-a)\sin\frac{\pi z}{z-a}+a\sin\frac{\pi z}{z-a}=$$

$$=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{(\pi a)^{2n+1}}{(2n+1)!}(z-a)^{-2n}+\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{\pi^{2n+1}a^{2n+2}}{(2n+1)!}(z-a)^{-2n-1}.$$

Завдання 19(1). Визначити тип особливих точок функції $f(z)=e^{\frac{1}{z}}\sin\frac{1}{z}$.

Розв'язання. Якщо розвинути в ряд Лорана кожний з множників

$$e^{\frac{1}{z}}=1+\frac{1}{z}+\frac{1}{2z^2}+...+\frac{1}{z^n n!}+...,$$

$$\sin\frac{1}{z}=\frac{1}{z}-\frac{1}{3!z^3}+...+(-1)^n\frac{1}{(2n+1)!z^{2n+1}}+...,$$

перемножити ці ряди, то одержимо ряд Лорана функції $f(z)$, який буде містити нескінченну кількість членів з від'ємними степенями z. Отже, точка $z=0$ є істотно особливою ізольованою точкою функції $f(z)$. В інших точках $f(z)$ є аналітичною.

Відповідь: $z=0$ – істотно особлива точка.

Завдання 19(2). Визначити тип особливої точки $z_0=0$ функції

$$f(z)=\frac{e^{z^3}-1}{e^z-1-z}.$$

Розв'язання. Розвинемо в ряд Маклорена чисельник та знаменник

$$f(z)=\frac{(1+z^3+\frac{1}{2}z^6+...)-1}{(1+z+\frac{1}{2}z^2+\frac{1}{6}z^3+...)-1-z}=\frac{z^3+\frac{1}{2}z^6+...}{\frac{1}{2}z^2+\frac{1}{6}z^3+...}=\frac{z(1+\frac{1}{2}z^3+...)}{\frac{1}{2}+\frac{1}{6}z+...}.$$

Як бачимо, $\lim\limits_{z\to 0}f(z)=0$.

Відповідь: $z_0=0$ є усувною ізольованою особливою точкою.

Завдання 19(3). Визначити тип особливих точок функції $f(z)=\dfrac{\sin\pi z}{z^4-1}e^{\frac{1}{z}}$.

Розв'язання. Функція не існує в точці $z_1=0$ та в точках, які є розв'язками рівняння $z^4=1$. Знайдемо усі значення $\sqrt[4]{1}$ за формулою

$$\omega_k=\sqrt[4]{1}(\cos\frac{2\pi k}{4}+i\sin\frac{2\pi k}{4}),\ k=0,1,2,3.$$

Одержимо точки $z_2=1,\ z_3=i,\ z_4=-1,\ z_5=-i$.

Якщо розвинути в ряд Лорана функції $\sin\pi z$; $\dfrac{1}{z^4-1}$; $e^{\frac{1}{z}}$ і перемножити ці ряди, вийде ряд Лорана нашої функції, отже точка $z_1=0$ є істотно особливою.

Оскільки

$$\lim_{z\to\pm i}f(z)=\lim_{z\to\pm i}\frac{\pm\sin\pi i\cdot e^{\frac{1}{\pm i}}}{(z^2-1)(z+i)(z-i)}=\lim_{z\to\pm i}\frac{\pm i\,\mathrm{sh}\,\pi\cdot e^{\mp i}}{(z^2-1)(z+i)(z-i)}=\infty;$$

$$\lim_{z\to\pm i}f\left(z\right)\left(z\mp i\right)=\mp\frac{\mathrm{sh}\,\pi}{4}e^{\mp i}\neq\infty,$$

отже точки $z=\pm i$ є простими полюсами функції $f\left(z\right)$.

$$\lim_{z\to 1}f\left(z\right)=\lim_{z\to 1}\frac{-\sin\pi\left(z-1\right)}{\left(z-1\right)\left(z+1\right)\left(z^2+1\right)}e^{1/z}=\lim_{z\to 1}\frac{-\pi\left(z-1\right)}{\left(z-1\right)\left(z+1\right)\left(z^2+1\right)}e^{1/z}=$$

$$=-\frac{\pi}{4}e,$$

$$\lim_{z\to -1}f\left(z\right)=\lim_{z\to -1}\frac{-\sin\pi\left(z+1\right)}{\left(z-1\right)\left(z+1\right)\left(z^2+1\right)}e^{1/z}=\lim_{z\to -1}\frac{-\pi\left(z+1\right)}{\left(z-1\right)\left(z+1\right)\left(z^2+1\right)}e^{1/z}=$$

$$=\frac{\pi}{4}e^{-1},$$

отже точки $z=\pm 1$ є усувними точками функції $f\left(z\right)$.

Відповідь: $z=0$ – істотно особлива точка, $z=\pm i$ – прості полюси, $z=\pm 1$ – усувні особливі точки.

Завдання 20. За допомогою лишків обчислити інтеграли.

1) $\displaystyle\oint\limits_{|z|=\frac{1}{2}} \frac{dz}{z\left(z^2+1\right)}.$

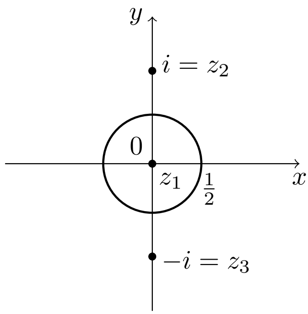
Розв'язання. Знайдемо корені рівняння

$$z\left(z^2+1\right)=0 \Rightarrow z_1=0, z_2=i, z_3=-i.$$

Ці точки є особливими точками функції, а саме простими полюсами

$$f(z)=\frac{1}{z\left(z^2+1\right)}.$$

Тільки точка $z_1=0$ знаходиться всередині кола $|z|=\frac{1}{2}$



За теоремою Коші про лишки:

$$\oint\limits_{|z|=\frac{1}{2}} f(z)\,dz=2\pi i \operatorname*{res}_{z_1=0} f(z).$$

Оскільки $\lim\limits_{z\to 0} f(z)\cdot z=1$, то точка $z=0$ є простим полюсом функції $f(z)$. Тому

$$\oint\limits_{|z|=\frac{1}{2}} f(z)\,dz=2\pi i \lim_{z\to 0} f(z)\cdot z=2\pi i.$$

Відповідь: $2\pi i$.

2) $\displaystyle\oint\limits_{|z-1|=2} \frac{\left(z^2+1\right)dz}{\left(z^2+4\right)\sin\frac{z}{3}}.$

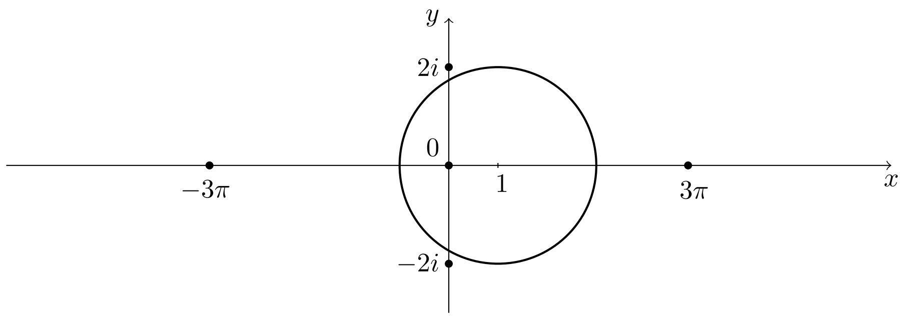
Розв'язання. Знайдемо корені рівняння

$$\left(z^2+4\right)\sin\frac{z}{3}=0 \Rightarrow z=\pm 2i; z=3\pi k,\ k\in\mathbb{Z}.$$

Ці точки є ізольованими особливими точками функції

$$f\left(z\right)=\frac{z^2+1}{\left(z^2+4\right)\sin\frac{z}{3}}.$$

Всередину кола $|z-1|=2$



попадає лише одна з них, а саме точка $z=0$. Таким чином,

$$\oint\limits_{|z-1|=2} f\left(z\right)dz=2\pi i\,\mathop{\mathrm{res}}_{z=0} f\left(z\right).$$

Оскільки

$$\lim_{z\to 0} f\left(z\right)=\infty,\quad \lim_{z\to 0} f\left(z\right)\cdot z=\lim_{z\to 0}\frac{z}{4\sin\frac{z}{3}}=\frac{3}{4},$$

то $z=0$ є простим полюсом. Отже,

$$\oint\limits_{|z-1|=2} f\left(z\right)dz=2\pi i\lim_{z\to 0} f\left(z\right)\cdot z=2\pi i\cdot\frac{3}{4}=\frac{3}{2}\pi i.$$

Відповідь: $\frac{3}{2}\pi i.$

3) $\displaystyle\oint\limits_{|z|=1}\frac{z^2e^{1/z^2}-1}{z}\,dz$

Розв'язання. Функція

$$f\left(z\right)=\frac{z^2e^{1/z^2}-1}{z}$$

має одну особливу ізольовану точку $z = 0$. Розвинемо її в ряд Лорана. Оскільки

$$e^{1/z^2} = 1 + \frac{1}{z^2} + \frac{1}{2z^4} + ...,$$

то

$$z^2 e^{1/z^2} - 1 = -1 + z^2 + 1 + \frac{1}{2z^2} + ...$$

Тоді

$$f(z) = \frac{1}{z}\left(z^2 + \frac{1}{2z^2} + ...\right) = z + \frac{1}{2z^3} + ...$$

Як бачимо, ряд Лорана функції $f(z)$ містить безліч членів з від'ємними степенями z. Отже, точка $z = 0$ є істотно особливою точкою функції $f(z)$. Незалежно від цього

$$\operatorname*{res}_{z=0} f(z) = c_{-1} = 0.$$

Таким чином,

$$\oint\limits_{|z|=1} f(z)\,dz = 2\pi i \operatorname*{res}_{z=0} f(z) = 0,$$

оскільки точка $z = 0$ лежить всередині кола $|z| = 1$.

Відповідь: 0.

4) $\displaystyle\oint\limits_{|z|=0,5} \frac{e^{2z} - \cos 9z}{z \operatorname{sh} \pi i z} dz.$

Розв'язання. Розв'яжемо рівняння

$$z \operatorname{sh} \pi i z = 0,\ \ z i \sin \pi z = 0 \Rightarrow z = 0,\ z = k,\ k \epsilon \mathbb{Z}.$$

Усі ці точки є ізольованими особливими точками функції

$$f(z) = \frac{e^{2z} - \cos 9z}{z \operatorname{sh} \pi i z}.$$

Серед них тільки точка $z = 0$ лежить всередині кола $|z| = 0,5$. Отже,

$$\oint\limits_{|z|=0,5} f(z)\,dz = 2\pi i \operatorname*{res}_{z=0} f(z).$$

Визначимо тип особливої точки $z = 0$. Для цього розвинемо в ряд Тейлора по степенях z чисельник та знаменник

$$f(z) = \frac{\left(1 + 2z + 2z^2 + ...\right) - \left(1 - \frac{1}{2} \cdot 81 z^2 + ...\right)}{z\left(\pi i z + \frac{1}{6} \cdot \pi^3 i^3 z^3 + ...\right)} =$$

$$= \frac{2 + \left(2 + \frac{81}{2}\right) z + \ldots}{z\left(\pi i - \frac{1}{6} \cdot \pi^3 i z^2 + \ldots\right)}.$$

Як бачимо,

$$\lim_{z\to 0} f(z) = \infty,$$

$$\lim_{z\to 0} f(z)\cdot z = \lim_{z\to 0} \frac{2 + \left(2 + \frac{81}{2}\right) z + \ldots}{\pi i - \frac{1}{6}\pi^3 i z^2 + \ldots} = \frac{2}{\pi i},$$

Отже, точка $z = 0$ є простим полюсом функції $f(z)$, тому

$$\oint\limits_{|z|=0,5} f(z)\,dz = 2\pi i \lim_{z\to 0} f(z)\, z = 2\pi i \frac{2}{\pi i} = 4.$$

Відповідь: 4.

5) $\displaystyle\int\limits_0^{2\pi} \frac{dt}{4\sqrt{2}\sin t + 6}$.

Розв'язання. Зробимо заміну $z = e^{it}$, тоді

$$\sin t = \frac{z^2 - 1}{2iz},\ dt = \frac{dz}{iz}.$$

Одержимо

$$\int\limits_0^{2\pi} \frac{dt}{4\sqrt{2}\sin t + 6} = \oint\limits_{|z|=1} \frac{2iz dz}{iz\left(4\sqrt{2}\left(z^2 - 1\right) + 12iz\right)} = \oint\limits_{|z|=1} \frac{2dz}{4\sqrt{2}z^2 + 12iz - 4\sqrt{2}}.$$

Розв'яжемо рівняння

$$4\sqrt{2}z^2 + 12iz - 4\sqrt{2} = 0.$$

Його корені

$$z_1 = -i\sqrt{2},\ z_2 = -\frac{i}{\sqrt{2}}.$$

Серед них тільки точка $z_2 = -\frac{i}{\sqrt{2}}$ попадає всередину кола $|z| = 1$. Отже,

$$\oint\limits_{|z|=1} \frac{2dz}{4\sqrt{2}z^2 + 12iz - 4\sqrt{2}} = 2\pi i \operatorname*{res}_{z=-\frac{i}{\sqrt{2}}} f(z),$$

де $f(z) = \dfrac{2}{4\sqrt{2}z^2 + 12iz - 4\sqrt{2}}$. Визначимо тип особливої точки $z = -\frac{i}{\sqrt{2}}$. Оскільки

$$\lim_{z\to -\frac{i}{\sqrt{2}}} f(z) = \infty,$$

$$\lim_{z\to-\frac{i}{\sqrt{2}}} f(z)\left(z+\frac{i}{\sqrt{2}}\right)=\lim_{z\to-\frac{i}{\sqrt{2}}}\frac{2\left(z+\frac{i}{\sqrt{2}}\right)}{4\sqrt{2}\left(z+i\sqrt{2}\right)\left(z+\frac{i}{\sqrt{2}}\right)}=$$

$$=\lim_{z\to-\frac{i}{\sqrt{2}}}\frac{1}{2\sqrt{2}\left(z+i\sqrt{2}\right)}=\frac{1}{2\sqrt{2}\left(\sqrt{2}-\frac{1}{\sqrt{2}}\right)i}=\frac{1}{2i},$$

то точка $z=-\frac{i}{\sqrt{2}}$ є простим полюсом функції $f(z)$. Тому

$$\oint\limits_{|z|=1} f(z)\,dz=2\pi i\operatorname*{res}_{z=-\frac{i}{\sqrt{2}}} f(z)=$$

$$=2\pi i\lim_{z\to-\frac{i}{\sqrt{2}}} f(z)\left(z+\frac{i}{\sqrt{2}}\right)=2\pi i\frac{1}{2i}=\pi.$$

Відповідь: π.

6) $\displaystyle\int\limits_0^{2\pi}\frac{dt}{\left(\sqrt{5}+\sqrt{2}\cos t\right)^2}$.

Розв'язання. Зробимо заміну $z=e^{it}$, тоді

$$\cos t=\frac{z^2+1}{2z},\ dt=\frac{dz}{iz}.$$

Маємо

$$\int\limits_0^{2\pi}\frac{dt}{\left(\sqrt{5}+\sqrt{2}\cos t\right)^2}=\oint\limits_{|z|=1}\frac{(2z)^2\,dz}{iz\left(2\sqrt{5}z+\sqrt{2}z^2+\sqrt{2}\right)^2}=$$

$$=\oint\limits_{|z|=1}\frac{4zdz}{i\left(2\sqrt{5}z+\sqrt{2}z^2+\sqrt{2}\right)^2}.$$

Розв'яжемо рівняння

$$\sqrt{2}z^2+2\sqrt{5}z+\sqrt{2}=0.$$

Корені рівняння

$$z_1=\frac{\sqrt{5}-\sqrt{3}}{\sqrt{2}},\ z_2=\frac{\sqrt{5}+\sqrt{3}}{\sqrt{2}}.$$

Точки z_1 та z_2 є особливими ізольованими точками функції

$$f(z)=\frac{4z}{i\left(\sqrt{2}z^2+2\sqrt{5}z+\sqrt{2}\right)^2}.$$

Серед них тільки точка z_1 лежить всередені кола $|z| = 1$. Отже,

$$\oint\limits_{|z|=1} f(z)\, dz = 2\pi i \operatorname*{res}_{z=z_1} f(z).$$

Оскільки число z_1 є коренем знаменника функції $f(z)$ кратності 2 і не є коренем чисельника, то точка $z = z_1$ є полюсом порядка 2 функції $f(z)$. Знаходимо:

$$\operatorname*{res}_{z=z_1} f(z) = \lim_{z\to z_1} \left(f(z)(z-z_1)^2\right)' = \lim_{z\to z_1} \left(\frac{4z}{i\sqrt{2}\,(z-z_2)^2}\right)' =$$

$$= \frac{1}{i\sqrt{2}} \lim_{z\to z_1} \frac{4(z-z_2)^2 - 8z(z-z_2)}{(z-z_2)^4} = \frac{1}{i\sqrt{2}} \lim_{z\to z_1} \frac{4z - 4z_2 - 8z}{(z-z_2)^3} =$$

$$= \frac{1}{i\sqrt{2}} \frac{-4(z_1+z_2)}{(z_1-z_2)^3} = -\frac{4}{i\sqrt{2}} \frac{\sqrt{10}}{\left(-\sqrt{6}\right)^3} = \frac{\sqrt{30}}{9i}.$$

Таким чином,

$$\oint\limits_{|z|=1} f(z)\, dz = 2\pi i \frac{\sqrt{30}}{9i}.$$

<u>Відповідь:</u> $\frac{1}{9} \cdot 2\pi\sqrt{30}$.

7) $\displaystyle\int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{(x^2+1)^2(x^2+16)}$.

<u>Розв'язання.</u> Обчислимо цей інтеграл за формулою

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{(x^2+1)^2(x^2+16)} = 2\pi i \left(\operatorname*{res}_{z=i} f(z) + \operatorname*{res}_{z=4i} f(z)\right),$$

де $f(z) = \dfrac{1}{(z^2+1)^2(z^2+16)}$.

Оскільки точка $z = 4i$ є простим полюсом функції $f(z)$, то

$$\operatorname*{res}_{z=4i} f(z) = \lim_{z\to 4i} f(z)(z-4i) = \lim_{z\to 4i} \frac{z-4i}{(z^2+1)^2(z-4i)(z+4i)} =$$

$$= \frac{1}{(-16+1)^2\, 8i} = \frac{1}{15^2 \cdot 8i}.$$

Оскільки точка $z = i$ є полюсом порядку 2 функції $f(z)$, то

$$\operatorname*{res}_{z=i} f(z) = \lim_{z\to i} \left(f(z)(z-i)^2\right)' = \lim_{z\to i} \left(\frac{1}{(z+i)^2(z^2+16)}\right)' =$$

$$= \lim_{z\to i} \frac{-2(z+i)\left(z^2+16\right) - 2z(z+i)^2}{(z+i)^4\left(z^2+16\right)^2} = \lim_{z\to i} \frac{-2z^2-32-2z^2-2iz}{(z+i)^3\left(z^2+16\right)^2} =$$

$$= \frac{-4i^2-32-2i^2}{(2i)^3(-1+16)^2} = \frac{-26}{-8i15^2} = \frac{26}{15^2\cdot 8i}.$$

Таким чином,

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{\left(x^2+1\right)^2\left(x^2+16\right)} = 2\pi i\left(\frac{1}{15^2\cdot 8i} + \frac{26}{15^2\cdot 8i}\right) =$$

$$= \frac{27\pi i}{15^2 4i} = \frac{3\pi}{25\cdot 4}.$$

Відповідь: $0,03\pi$.

8) $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos 3x - \cos 2x}{\left(x^2+1\right)^2} dx.$

Розв'язання. Запишемо інтеграл як різницю інтегралів

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos 3x - \cos 2x}{\left(x^2+1\right)^2} dx = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos 3x}{\left(x^2+1\right)^2} dx - \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos 2x}{\left(x^2+1\right)^2} dx$$

кожний з яких обчислимо за формулами

$$I_1 = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos 3x}{\left(x^2+1\right)^2} dx = \mathrm{Re}\left[2\pi i \operatorname*{res}_{z=i}\left(f(z)\cdot e^{3iz}\right)\right],$$

$$I_2 = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos 2x}{\left(x^2+1\right)^2} dx = \mathrm{Re}\left[2\pi i \operatorname*{res}_{z=i}\left(f(z)\cdot e^{2iz}\right)\right],$$

де $f(z) = \dfrac{1}{\left(z^2+1\right)^2}$.

Оскільки функції $f(z)\cdot e^{3iz}$ та $f(z)\cdot e^{2iz}$ мають полюс порядка 2 в точці $z=i$, то

$$\operatorname*{res}_{z=i}\left(f(z)\,e^{3iz}\right) = \lim_{z\to i}\left(\frac{e^{3iz}}{\left(z^2+1\right)^2}(z-i)^2\right)' = \lim_{z\to i}\left(\frac{e^{3iz}}{(z+i)^2}\right)' =$$

$$= \lim_{z\to i} \frac{3ie^{3iz}(z+i)^2 - 2(z+i)\,e^{3iz}}{(z+i)^4} =$$

$$= \lim_{z\to i} \frac{\left(3iz + 3i^2 - 2\right) e^{3iz}}{(z+i)^3} = \frac{3i^2 + 3i^2 - 2}{(2i)^3} e^{3i^2} = \frac{-8}{-8i} e^{-3} = \frac{e^{-3}}{i}.$$

$$\operatorname*{res}_{z=i} \left(f(z) e^{2iz}\right) = \lim_{z\to i} \left(\frac{e^{2iz}}{(z+i)^2}\right)' = \lim_{z\to i} \frac{2ie^{2iz}(z+i)^2 - 2(z+i)e^{2iz}}{(z+i)^4} =$$

$$= \lim_{z\to i} \frac{\left(2iz + 2i^2 - 2\right) e^{2iz}}{(z+i)^3} = \frac{-2-2-2}{(2i)^3} e^{2i^2} = \frac{-6}{-8i} e^{-2} = \frac{3e^{-2}}{4i}.$$

Таким чином,

$$I_1 = \operatorname{Re}\left(2\pi i \frac{e^{-3}}{i}\right) = \frac{2\pi}{e^3},$$

$$I_2 = \operatorname{Re}\left(2\pi i \frac{3}{4i} e^{-2}\right) = \frac{3\pi}{2e^2}.$$

Отже,

$$I_1 - I_2 = \frac{2\pi}{e^3} - \frac{3\pi}{2e^2}$$

Відповідь: $\frac{\pi}{2e^3}(4 - 3e)$.

9) $\displaystyle\oint\limits_{|z+2i|=3} \left(\frac{\pi}{e^{\pi z/2}+1} + \frac{6\operatorname{ch}\frac{\pi i z}{2-2i}}{(z-2+2i)^2(z-4-2i)}\right) dz.$

Розв'язання. Запишемо інтеграл як суму інтегралів

$$\oint\limits_{|z+2i|=3} \left(\frac{\pi}{e^{\pi z/2}+1} + \frac{6\operatorname{ch}\frac{\pi i z}{2-2i}}{(z-2+2i)^2(z-4-2i)}\right) dz =$$

$$= \oint\limits_{|z+2i|=3} \frac{\pi dz}{e^{\pi z/2}+1} + \oint\limits_{|z+2i|=3} \frac{6\operatorname{ch}\frac{\pi i z}{2-2i}}{(z-2+2i)^2(z-4-2i)} dz =$$

$$= I_1 + I_2.$$

Щоб обчислити інтеграл I_1, знайдемо ізольовані особливі точки функції

$$f_1(z) = \frac{\pi}{e^{\pi z/2}+1}.$$

Для цього розв'яжемо рівняння

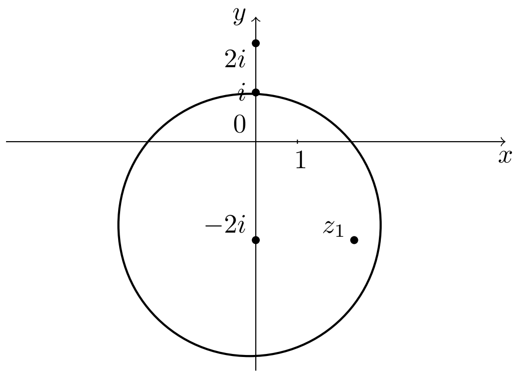
$$e^{\pi z/2} + 1 = 0.$$

$$e^{\pi z/2} = -1,$$

$$\frac{\pi z}{2} = \mathrm{Ln}\,(-1) = \ln 1 + i\,(\pi + 2\pi k) = i\,(\pi + 2\pi k)\,,\ \ k \in \mathbb{Z}.$$

$$z = 2i + 4ki,\ \ k \in \mathbb{Z}.$$

Серед цих точок тільки точка $z = -2i$ лежить всередині кола $|z + 2i| = 3$



Ця точка є простим полюсом функції $f_1\,(z)$, тому що

$$\lim_{z \to -2i} f_1\,(z) = \infty,$$

$$\lim_{z \to -2i} f_1\,(z)\,(z + 2i) = \lim_{z \to -2i} \frac{z + 2i}{e^{-\pi i} e^{\pi (z+2i)/2} + 1} =$$

$$= -\lim_{z \to -2i} \frac{z + 2i}{\left(1 + \dfrac{\pi\,(z + 2i)}{2} + \dfrac{\pi^2\,(z + 2i)^2}{8} + \ldots\right) - 1} =$$

$$= -\lim_{z \to -2i} \frac{1}{\dfrac{\pi}{2} + \dfrac{\pi^2}{8}\,(z + 2i) + \ldots} = -\frac{2}{\pi}.$$

Таким чином,

$$\operatorname*{res}_{z=-2i} f_1\,(z) = -\frac{2}{\pi},$$

$$I_1 = 2\pi i \operatorname*{res}_{z=-2i} f_1\,(z) = 2\pi i \cdot \left(-\frac{2}{\pi}\right) = -4i.$$

Щоб обчислити інтеграл I_2, знайдемо ізольовані особливі точки функції

$$f_2\,(z) = \frac{6\,\mathrm{ch}\,\dfrac{\pi i z}{2 - 2i}}{(z - 2 + 2i)^2\,(z - 4 - 2i)}.$$

Розв'яжемо рівняння

$$(z-2+2i)^2(z-4-2i)=0.$$

Одержимо дві точки

$$z_1=2-2i, z_2=4+2i.$$

Тільки одна з них, а саме точка z_1, лежить всередині кола $|z+2i|=3$ (див. малюнок). Оскільки чисельник функції $f_2(z)$ є функцією аналітичною, то інших ізольованих особливих точок функція $f_2(z)$ не має. Отже,

$$I_2=2\pi i \operatorname*{res}_{z=2-2i} f_2(z).$$

Оскільки

$$\lim_{z\to 2-2i} f_2(z)=\lim_{z\to 2-2i} f_2(z)(z-2+2i)=\infty,$$

$$\lim_{z\to 2-2i} f_2(z)(z-2+2i)^2=\frac{6\operatorname{ch}\dfrac{\pi i(2-2i)}{2-2i}}{2-2i-4-2i}=\frac{6\operatorname{ch}\pi i}{-2-4i},$$

то точка $z_1=2-2i$ є полюсом порядку $n=2$. Тому

$$\operatorname*{res}_{z=2-2i} f_2(z)=\lim_{z\to 2-2i}\left(f_2(z)(z-2+2i)^2\right)'=$$

$$=\lim_{z\to 2-2i}\frac{6\left(\dfrac{\pi i}{2-2i}\operatorname{sh}\dfrac{\pi iz}{2-2i}(z-4-2i)-\operatorname{ch}\dfrac{\pi iz}{2-2i}\right)}{(z-4-2i)^2}=$$

$$=\frac{6\left(\dfrac{\pi i}{2-2i}\operatorname{sh}\pi i(-2-4i)-\operatorname{ch}\pi i\right)}{(z-4-2i)^2}=$$

$$=\frac{-6\cos\pi}{4+16i-16}=\frac{6}{16i-12}=\frac{-3}{6-8i}=\frac{-3(6+8i)}{36+64}=-0,18+0,24i.$$

Таким чином,

$$I_2=2\pi i(-0,18+0,24i)=-\pi(0,48+0,36i)$$

Нагадаємо, що наш інтеграл дорівнює сумі I_1+I_2.

Відповідь:$-4i-\pi(0,48+0,36i)$.

Завдання 21. Знайти відображення функцією $w=f(z)$ області D, заданої в комплексній площині z, на область D_1 в комплексній площині w та дати геометричну інтерпретацію, якщо

$$f(z)=\frac{z+1}{z-1},\ D:\ y\geq x+1.$$

Розв'язання. Спочатку знайдемо образ прямої $y = x+1$. Для цього підставимо в функцію $z = x + i\,(x+1)$, одержимо

$$w = 1 + \frac{2}{z-1} = 1 + \frac{2}{(x-1) + i\,(x+1)} =$$

$$= 1 + \frac{2\,(x - 1 - i\,(x+1))}{(x-1)^2 + (x+1)^2} = 1 + \frac{(x-1) - i\,(x+1)}{x^2+1}.$$

Якщо $w = u + iv$, то

$$u - 1 + iv = \frac{x-1}{x^2+1} - i\frac{x+1}{x^2+1},$$

або маємо рівняння кривої в параметричній формі

$$\begin{cases} u = 1 + \dfrac{x-1}{x^2+1}, \\ v = -\dfrac{x+1}{x^2+1}. \end{cases}$$

Для знаходження канонічного рівняння цієї лінії виключимо з системи x. Оскільки

$$\begin{cases} x^2 + 1 = \dfrac{x-1}{u-1}, \\ x^2 + 1 = -\dfrac{x+1}{v}, \end{cases}$$

то

$$\frac{x-1}{u-1} = -\frac{x+1}{v},$$

звідки

$$x = \frac{v-u+1}{v+u-1}.$$

Підставимо x в друге рівняння системи, одержимо

$$v\left(\left(\frac{v-u+1}{v+u-1}\right)^2 + 1\right) = -\left(\frac{v-u+1}{v+u-1} + 1\right),$$

$$v\left((v-u+1)^2 + (v+u-1)^2\right) = -2v\,(v+u-1)\,.$$

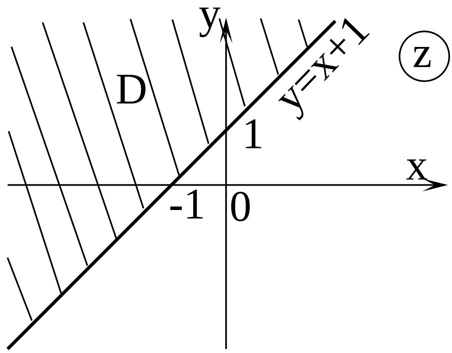
Оскільки $v \neq 0$, то

$$(v-u+1)^2 + (v+u-1)^2 = -2\,(v+u-1)$$

$$u^2 + v^2 - u + v = 0$$

$$\left(u - \frac{1}{2}\right)^2 + \left(v + \frac{1}{2}\right)^2 = \frac{1}{2}.$$

Це рівняння кола з центром в точці $\left(\frac{1}{2}; -\frac{1}{2}\right)$ і радіусом $\frac{1}{\sqrt{2}}$. Щоб з'ясувати, в яку область переходить область D

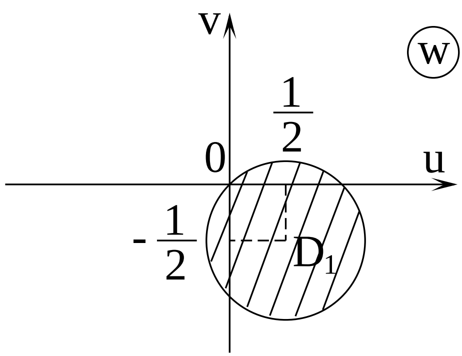


перевіримо, куди переходить точка $z = 0$ при відображенні $w = f(z)$. Маємо $f(0) = -1$. Ця точка не лежить всередині одержаного кола, отже область D переходить в круг.

Відповідь:D_1 – замкнений круг

$$\left(u - \frac{1}{2}\right)^2 + \left(v + \frac{1}{2}\right)^2 \leq \frac{1}{2}.$$

Геометрична інтерпретація



Завдання 22. Знайти зображення оригіналу:

1) $f(t) = t^2 \cos 4t$.

Розв'язання. Оскільки

$$\cos 4t \to \frac{p}{p^2 + 16},$$

то за властивістю диференціювання зображення

$$t^2 \cos 4t \to \left(\frac{p}{p^2+16}\right)'' =$$

$$= \left(\frac{p^2+16-2p^2}{\left(p^2+16\right)^2}\right)' = \left(\frac{16-p^2}{\left(p^2+16\right)^2}\right)' =$$

$$= \frac{-2p\left(p^2+16\right)^2 - 4p\left(p^2+16\right)\left(16-p^2\right)}{\left(p^2+16\right)^4} =$$

$$= \frac{-2p\left(p^2+16+2\left(16-p^2\right)\right)}{\left(p^2+16\right)^3}$$

Відповідь: $F\left(p\right) = \dfrac{2p\left(p^2-48\right)}{\left(p^2+16\right)^3}$.

2) $f\left(t\right) = \dfrac{e^{-t}-t-1}{t}$.

Розв'язання. Оскільки

$$e^{-t}-t-1 \to \frac{1}{p+1} - \frac{1}{p^2} - \frac{1}{p},$$

то за властивістю інтегрування зображення

$$\frac{e^{-t}-t-1}{t} \to \int\limits_p^\infty \left(\frac{1}{q+1} - \frac{1}{q^2} - \frac{1}{q}\right) dq.$$

Оскільки інтеграл не залежить від шляху інтегрування, інтегруватимемо вздовж лінії $y = y_0$, $x_0 \le x < +\infty$, де $x_0 = \operatorname{Re} p$, $y_0 = \operatorname{Im} p$, $x = \operatorname{Re} q$, $y = \operatorname{Im} q$.

Таким чином,

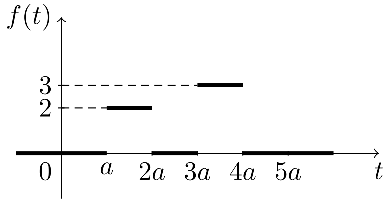
$$F\left(p\right) = \lim_{b\to+\infty} \left(\ln\left|x+1+iy_0\right| - \ln\left|x+iy_0\right| + \frac{1}{x+iy_0}\right)\Bigg|_{x_0}^{b} =$$

$$= \lim_{b\to\infty}\left(\ln\left|\frac{b+1+iy_0}{b+iy_0}\right| + \frac{1}{b+iy_0}\right) -$$

$$- \ln\left|\frac{x_0+1+iy_0}{x_0+iy_0}\right| - \frac{1}{x_0+iy_0} = \ln\frac{p}{p+1} - \frac{1}{p}.$$

Відповідь: $F\left(p\right) = \ln\dfrac{p}{p+1} - \dfrac{1}{p}$.

3)



Розв'язання. Запишемо $f(t)$ у вигляді

$$f(t) = 2(\eta(t-a) - \eta(t-2a)) + 3(\eta(t-3a) - \eta(t-4a)).$$

Оскільки

$$\eta(t) \to \frac{1}{p},$$

то за теоремою запізнення маємо

$$F(p) = 2\left(e^{-ap}\frac{1}{p} - e^{-2ap}\frac{1}{p}\right) +$$

$$+3\left(e^{-3ap}\frac{1}{p} - e^{-4ap}\frac{1}{p}\right).$$

Відповідь: $F(p) = \dfrac{1}{p}\left(2e^{-ap} - 2e^{-2ap} + 3e^{-3ap} - 3e^{-4ap}\right).$

Завдання 23. Знайти оригінал за даним зображенням

$$F(p) = \frac{2p+3}{p^3 + 4p^2 + 5p}.$$

Розв'язання. Запишемо дану функцію у вигляді суми

$$F(p) = \frac{A}{p} + \frac{Bp + C}{p^2 + 4p + 5}$$

Щоб знайти константи A, B, C приведемо до спільного знаменника та прирівняємо чисельники. Одержимо тотожність

$$2p + 3 \equiv A\left(p^2 + 4p + 5\right) + (Bp + C)\,p,$$

$$2p + 3 \equiv (A + B)\,p^2 + (4A + C)\,p + 5A.$$

Прирівняємо коефіцієнти при однакових степенях p

$p^2: \; A + B = 0,$

$p^1: \ 4A + C = 0,$

$p^0: \ 5A = 3.$

Звідки одержимо, що

$$A = 0,6; \ B = -0,6; \ C = -0,4.$$

Таким чином,

$$F(p) = \frac{0,6}{p} - \frac{0,6p + 0,4}{p^2 + 4p + 5} =$$

$$= 0,2 \cdot \left(\frac{3}{p} - \frac{3p + 2}{(p+2)^2 + 1^2} \right) = 0,2 \cdot \left(\frac{3}{p} - \frac{3p + 6 - 4}{(p+2)^2 + 1^2} \right) =$$

$$= 0,2 \left(3 \cdot \frac{1}{p} - 3 \cdot \frac{p+2}{(p+2)^2 + 1^2} + 4 \cdot \frac{1}{(p+2)^2 + 1^2} \right)$$

Далі скористаємось властивістю лінійності та таблицею оригиналів та їх зображень.

Відповідь: $f(t) = 0,2 \left(3 - 3e^-2t \cos t + 4e^{-2t} \sin t \right).$

Завдання 24. Розв'язати задачу Коші

1) $x'' + 2x' + x = \eta(t) + 2\eta(t-2)$, якщо $x(0) = x'(0) = 0.$

Розв'язання. Застосуємо перетворення Лапласа до лівої та правої частин рівняння. Одержимо операторне рівняння

$$p^2 X(p) + 2pX(p) + X(p) = \frac{1}{p} + \frac{2}{p} e^{-2p},$$

де $X(p)$ – зображення невідомої функції-оригінала $x(t)$. Звідси

$$X(p) = \frac{1 + 2e^{-2p}}{p(p^2 + 2p + 1)} = \left(\frac{1}{p} - \frac{1}{p+1} - \frac{1}{(p+1)^2} \right) \left(1 + 2e^{-2p} \right).$$

При знаходженні оригіналу $x(t)$, застосуємо теорему запізнення.

Відповідь: $x(t) = (1 - e^{-t} - te^{-t})\, \eta(t) + 2\left(1 - e^{-(t-2)} - te^{-(t-2)} \right) \eta(t-2).$

2) $y'' + 4y' + 4y = \dfrac{e^{-2t}}{(1+2t)^2}, \ y(0) = y'(0) = 0.$

Розв'язання. Розглянемо іншу задачу Коші

$$y_1'' + 4y_1' + 4y_1 = 1, \ y_1(0) = y_1'(0) = 0,$$

та розв'яжемо її операційним методом. Складемо операторне рівняння

$$p^2 Y_1(p) + 4pY_1(p) + 4Y_1(p) = \frac{1}{p},$$

де $Y_1(p)$ – зображення функції-оригіналу $y_1(t)$. Маємо

$$Y_1(p) = \frac{1}{p(p+2)^2}.$$

За теоремою диференціювання оригіналу

$$y_1'(t) \to pY_1(p) = \frac{1}{(p+2)^2},$$

тому за таблицею маємо

$$y_1'(t) = te^{-2t}.$$

Тоді за формулою Дюамеля

$$y(t) = \int_0^t y_1'(t-\tau) f(\tau) d\tau =$$

$$= \int_0^t (t-\tau) e^{-2(t-\tau)} \frac{e^{-2\tau}}{(1+2\tau)^2} d\tau = e^{-2t} \int_0^t \frac{t-\tau}{(2\tau+1)^2} d\tau =$$

$$= e^{-2t}\left(t+\frac{1}{2}\right) \int_0^t \frac{d\tau}{(2\tau+1)^2} - e^{-2t}\frac{1}{2} \int_0^t \frac{d\tau}{2\tau+1} =$$

$$= \frac{1}{4}e^{-2t}(2t+1) \int_0^t \frac{d(2\tau+1)}{(2\tau+1)^2} - \frac{1}{4}e^{-2t} \int_0^t \frac{d(2\tau+1)}{2\tau+1} =$$

$$= \frac{1}{4}e^{-2t}(2t+1)\left(1-\frac{1}{2t+1}\right) - \frac{1}{4}e^{-2t}\ln(2t+1).$$

Відповідь: $y(t) = \dfrac{t}{2}e^{-2t} - \dfrac{1}{4}e^{-2t}\ln(2t+1)$.

3) $y'' - 3y' + 2y = 2e^t \cos\frac{t}{2},\ y(0) = 1,\ y'(0) = 0.$

Розв'язання. Застосуємо перетворення Лапласа до лівої та правої частин рівняння. Припустимо, що

$$y(t) \to Y(p),$$

тоді

$$y'(t) \to pY(p) - 1,$$

$$y''(t) \to p^2Y(p) - p,$$

та за таблицею

$$2e^t \cos\frac{t}{2} \to \frac{2(p-1)}{(p-1)^2 + \frac{1}{4}} = \frac{8p-8}{4p^2+5-8p}.$$

Одержимо операторне рівняння

$$p^2Y - p - 3pY + 3 + 2Y = \frac{8p-8}{4p^2-8p+5},$$

$$Y\left(p^2 - 3p + 2\right) = p - 3 + \frac{8p-8}{4p^2-8p+5},$$

$$Y(p) = \frac{4p^3 - 20p^2 + 37p - 23}{(p-1)(p-2)(4p^2+5-8p)}.$$

Запишемо $Y(p)$ у вигляді суми

$$Y(p) = \frac{A}{p-1} + \frac{B}{p-2} + \frac{Cp+D}{4p^2-8p+5}.$$

Тоді

$$4p^3 - 20p^2 + 37p - 23 \equiv A(p-2)\left(4p^2 - 8p + 5\right) +$$

$$+B(p-1)\left(4p^2 + 5 - 8p\right) + (Cp+D)(p-1)(p-2).$$

Підставимо в ліву та праву частини значення

$$p = 1: \ -2 = -A,$$

$$p = 2: \ 3 = 5B,$$

$$p = 0: \ -23 = -10A - 5B + 2D,$$

$$p = -1: \ -84 = -51A - 34B - 6C + 6D.$$

Отже,

$$A = 2; \ B = 0,6;$$

$$2D = -23 + 20 + 3; \ D = 0;$$

$$6C = 84 - 102 - 20,4; \ C = -6,4.$$

Таким чином,

$$Y(p) = \frac{2}{p-1} + \frac{0,6}{p-2} + \frac{-6,4p}{4(p-1)^2+1} =$$

$$= \frac{2}{p-1} + \frac{0,6}{p-2} - 1,6\frac{p-1}{(p-1)^2+\frac{1}{4}} - 1,6\cdot 2\frac{\frac{1}{2}}{(p-1)^2+\frac{1}{4}}.$$

Оригінал цієї функції знаходимо за таблицею

Відповідь: $y(t) = 2e^t + 0,6e^{2t} - 1,6e^t\cos\frac{t}{2} - 3,2e^t\sin\frac{t}{2}$.

4) $\begin{cases} x' = -2x + y \\ y' = 3x \end{cases}$, $x(0) = 0$, $y(0) = 1$.

Розв'язання. Застосуємо до лівих та правих частин рівнянь перетворення Лапласа. Одержимо систему операторних рівнянь

$$\begin{cases} pX(p) = -2X(p) + Y(p), \\ pY(p) - 1 = 3X(p), \end{cases}$$

де $X(p)$ та $Y(p)$ – зображення невідомих функцій-оригіналів $x(t)$ та $y(t)$.

$$\begin{cases} X(p) = \dfrac{1}{3}(pY(p) - 1), \\ \dfrac{p}{3}(pY(p) - 1) = \dfrac{-2}{3}(pY(p) - 1) + Y(p), \end{cases}$$

$$p^2Y - p = -2pY + 2 + 3Y,$$

$$Y(p) = \frac{p+2}{p^2+2p-3} = \frac{p+2}{(p-1)(p+3)}.$$

Ця функція має два простих полюси $p_1 = 1$, $p_2 = -3$. Таким чином, оригінал цієї функції знаходимо за формулою

$$y(t) = \operatorname*{res}_{p=1}\left(Y(p)e^{pt}\right) + \operatorname*{res}_{p=-3}\left(Y(p)e^{pt}\right) =$$

$$= \lim_{p\to 1}\frac{p+2}{p+3}e^{pt} + \lim_{p\to -3}\frac{p+2}{p-1}e^{pt} = \frac{3}{4}e^{t} + \frac{1}{4}e^{-3t}.$$

Підставимо значення $Y(p)$ в першу рівність останньої системи, одержимо

$$X(p) = \frac{1}{3}\left(\frac{p^2+2p}{p^2+2p-3} - 1\right) = \frac{1}{(p-1)(p+3)}.$$

Оригінал цієї функції знайдемо за аналогічною формулою

$$x(t) = \operatorname*{res}_{p=1}\left(X(p)e^{pt}\right) + \operatorname*{res}_{p=-3}\left(X(p)e^{pt}\right) =$$

$$= \lim_{p\to 1}\left(\frac{1}{p+3}e^{pt}\right) + \lim_{p\to -3}\left(\frac{1}{p-1}e^{pt}\right) =$$

$$= \frac{1}{4}e^{t} - \frac{1}{4}e^{-3t}.$$

Відповідь: $\begin{cases} x(t) = \dfrac{1}{4}\left(e^{t} - e^{-3t}\right) \\ y(t) = \dfrac{1}{4}\left(3e^{t} + e^{-3t}\right). \end{cases}$

Завдання 25. Розв'язати інтегральне рівняння

$$\int_0^x \operatorname{ch}(x-t)\,y(t)\,dt = \operatorname{ch} x - \cos x.$$

Розв'язання. Застосуємо до лівої та правої частини рівняння перетворення Лапласа. Оскільки

$$\operatorname{ch} x \to \frac{p}{p^2-1},$$

$$\cos x \to \frac{p}{p^2+1},$$

то за теоремою про згортку

$$\int_0^x \operatorname{ch}(x-t)\, y(t)\, dt \to \frac{p}{p^2-1} Y(p),$$

де $Y(p)$ – зображення невідомої функції-оригіналу. Отже,

$$\frac{p}{p^2-1} Y(p) = \frac{p}{p^2-1} - \frac{p}{p^2+1},$$

звідси

$$Y(p) = \frac{2}{p^2+1}.$$

Оригінал цієї функції знаходимо за таблицею.

Відповідь: $y(x) = 2\sin t$.

Варіанти завдань типової розрахункової роботи

Варіант 1

1. Звести до тригонометричної форми комплексне число

$$\left(1+\cos\frac{\pi}{8}+i\sin\frac{\pi}{8}\right)^{20}.$$

2. Подати в алгебраїчній формі

$$\left(\frac{i\sqrt{3}-1}{i-\sqrt{3}}\right)^{8}.$$

3. Знайти всі значення кореня та побудувати їх

$$\sqrt[4]{16i}.$$

4. Зобразити множину точок

$$\{z\in\mathbb{C}:\ |z-1|\le 1, |z+1|>2\}.$$

5. Визначити вид кривої

$$z=3\sec t+i\,2\operatorname{tg}t.$$

6. Побудувати лінії та області, що задані співвідношенням

$$|z+i|>|z-i|.$$

7. Знайти всі значення функцій

1) $\cos 2i$; 2) $\ln(-2)$, $\operatorname{Ln}(-2)$;

3) $\operatorname{Arcsin}3$; 4) $\sin\left(\frac{\pi}{4}+2i\right)$.

8. Перевірити, чи є функція $f(z)$ аналітичною, якщо так, знайти її похідну

$$f(z)=\left(x^2-y^2\right)+2xyi.$$

9. Відновити аналітичну функцію $f(z)$, якщо

1) $\operatorname{Re}f(z)=e^x\cos y$;

2) $\operatorname{Re}f(z)=x^2-y^2+x,\ f(0)=0$.

10. Знайти коефіцієнт розтягу та кут повороту в точці z_0 при відображенні комплексної площини, яке задається функцією

$$f(z)=\frac{z+1}{z-1},\ z_0=2i.$$

11. Обчислити $\int\limits_L z\operatorname{Re}z\,dz$,

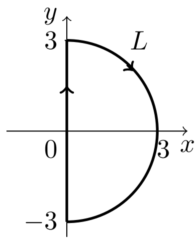
1)$L:\ y=x,\ 0\to 1+i$;

2)$L:\ y=x^2,\ 0\to 1+i$;

3)$L:$ ламана $z_1z_2z_3,\ z_1=0,\ z_2=1+i,\ z_3=1$.

12. Обчислити $\oint\limits_C z\operatorname{Re}z\,dz$ по контуру C, який складається з верхнього півкола $|z|=a$ та відрізка дійсної осі, з обходом контура проти годинникової стрілки.

13. Обчислити $\oint\limits_L \operatorname{Im}\left(z^2+\bar{z}^2\right)dz$, де крива L задана графічно:



14. Обчислити $\oint\limits_{|z|=2}\frac{\cos z}{z^2(z-i)}dz$ за допомогою теореми Коші, інтегральної формули Коші або формули для похідних.

15. Обчислити $\int\limits_0^{2+i} z^2dz$.

16. Обчислити $\int\limits_L z^{-2}dz$,

$L:\ y=x^2,\ 0\to 1+i$.

17. Знайти радіус збіжності ряду

$$\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{z}{4}\right)^n.$$

Варіант 1

18. Знайти всі лоранівські розвинення функції

1) $f(z) = \dfrac{z-2}{2z^3+z^2-z}$, $z_0 = 0$;

2) $f(z) = \dfrac{z+1}{z(z-1)}$, $z_0 = 1+2i$;

3) $f(z) = z\cos\dfrac{1}{z-2}$, $z_0 = 2$.

19. Визначити тип особливих точок функції

1) $f(z) = \dfrac{1}{1-\sin z}$;

2) $f(z) = \dfrac{e^{9z}-1}{\sin z - z - \frac{z^3}{6}}$, $z_0 = 0$;

3) $f(z) = \dfrac{e^{\frac{1}{z}}}{\sin\frac{1}{z}}$.

20. За допомогою лишків обчислити інтеграли

1) $\displaystyle\oint\limits_{|z|=1} \frac{e^z dz}{z^2(z^2-9)}$; 2) $\displaystyle\oint\limits_{|z|=\frac{1}{2}} \frac{dz}{z(z^2+1)}$;

3) $\displaystyle\oint\limits_{|z|=1} \frac{\cos z^2 - 1}{z^3} dz$;

4) $\displaystyle\oint\limits_{|z|=0,2} \frac{3\pi z - \sin 3\pi z}{z^2 - \operatorname{sh}^2 \pi^2 z} dz$;

5) $\displaystyle\int\limits_0^{2\pi} \frac{dt}{2+\sqrt{3}\sin t}$;

6) $\displaystyle\int\limits_0^{2\pi} \frac{dt}{\left(1+\sqrt{\frac{10}{11}}\cos t\right)^2}$;

7) $\displaystyle\int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{x^2-x+2}{x^4+10x^2+9} dx$;

8) $\displaystyle\int\limits_0^{\infty} \frac{x\sin 3x}{(x^2+4)^2} dx$;

9) $\displaystyle\oint\limits_{|z+i|=3} \left(\frac{4\sin\frac{\pi z}{z-2i}}{(z-2+i)^2(z-4+i)} + \right.$

$\displaystyle\left. + \frac{\pi i}{e^{\frac{\pi z}{2}}+i}\right) dz.$

21. Знайти відображення функцією $\omega = f(z)$ області D, заданої в комплексній площині z на область D_1 в комплексній площині ω та дати графічну інтерпретацію

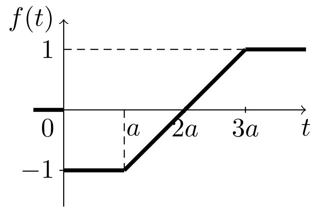
$$\omega = \frac{1}{z},\ D: \begin{cases} x^2+y^2 < 2y \\ y > x \end{cases}.$$

22. Знайти зображення оригіналу

1) $f(t) = t^2 \sin 2t$;

2) $f(t) = \dfrac{e^{-2t}\cos t}{t}$;

3)



23. Знайти оригінал за даним зображенням

$$F(p) = \frac{4p+5}{(p-2)(p^2+4p+5)}.$$

24. Розв'язати задачу Коші

1) $y' + 2y = \eta(t) + \eta(t-3)$, $y(0) = 1$;

2) $y'' - y = \operatorname{th} t$, $y(0) = y'(0) = 0$;

3) $y'' + y = 6e^{-t}$, $y(0) = 3$, $y'(0) = 1$;

4) $\begin{cases} x' = x+3y+2, \\ y' = x-y+1, \end{cases}$

$x(0) = -1$, $y(0) = 2$.

25. Розв'язати інтегральне рівняння

$$y(x) = \sin x + \int\limits_0^x (x-t)\,y(t)\,dt.$$

Варіант 2

1. Звести до тригонометричної форми комплексне число

$$\left(-\cos\frac{\pi}{7}+i\sin\frac{\pi}{7}\right)^{21}.$$

2. Подати в алгебраїчній формі

$$\left(\frac{2+2i}{i-\sqrt{3}}\right)^{14}.$$

3. Знайти всі значення кореня та побудувати їх

$$\sqrt[4]{1+i\sqrt{3}}.$$

4. Зобразити множину точок

$$\{z\in\mathbb{C}\,|\,|z+i|\geq 1,\ |z|<2\}.$$

5. Визначити вид кривої

$$z=2\sec t-i\,3\,\mathrm{tg}\,t.$$

6. Побудувати лінії та області, що задані співвідношеннями

$$1\leq|z+1|\leq 2;\quad \frac{\pi}{2}<\arg z<\pi.$$

7. Знайти всі значення функції

1) $\cos 3i$; 2) $\ln i$; $\mathrm{Ln}\, i$;

3) $\mathrm{Arcsin}\, 3i$; 4) $\cos\left(\frac{\pi}{6}+2i\right)$.

8. Перевірити, чи є функція $f(z)$ аналітичною, якщо так, знайти її похідну

$$f(z)=(x^2+y^2)-2xyi.$$

9. Відновити аналітичну функцію $f(z)$, якщо

1) $\mathrm{Im}\, f(z)=e^{-y}sinx$;

2) $\mathrm{Re}\, f(z)=x^3-3xy+1,\ f(0)=1.$

10. Знайти коефіцієнт розтягу та кут повороту в точці z_0, при відображенні комплексної площини, яке задається функцією

$$f(z)=\frac{2z+3}{z+4},\ z_0=1.$$

11. Обчислити інтеграл $\int\limits_L \bar{z}\mathrm{Re}\, z\, dz$,

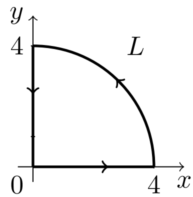
1) $L: y=x,\ 0\to 1+i$;

2) $L: y=x^2,\ 0\to 1+i$;

3) $L:$ ламана $z_1z_2z_3$, $z_1=0$, $z_2=1+i$, $z_3=1$.

12. Обчислити інтеграл $\oint\limits_C \bar{z}\mathrm{Re}\, z\, dz$ по контуру C, який складається з верхнього півкола $|z|=a$ та відрізка дійсної осі, з обходом контуру проти годинникової стрілки.

13. Обчислити $\oint\limits_L(\bar{z}+\mathrm{Im}\bar{z})\,dz$, де крива L задана графічно:



14. Обчислити $\oint\limits_{|z-z_c|=R}\frac{\sin z}{z+i}\,dz$,

$$\begin{cases} R=3,\ z_c=1; \\ R=1,\ z_c=i \end{cases}$$

за допомогою теореми Коші, інтегральної формули Коші або формули для похідних.

15. Обчислити $\int\limits_0^{1+\frac{\pi}{2}i} e^z\,dz.$

16. Обчислити $\int\limits_L(z+1)e^z\,dz$,

$L:\{|z|=1,\ Re\, z\geq 0\}$.

17. Знайти радіус збіжності ряду

$$\sum_{n=1}^{\infty}(2iz)^n.$$

Варіант 2

18. Знайти всі лоранівські розвинення функції

1) $f(z) = \dfrac{z-4}{z^4+z^3-2z^2},\ z_0 = 0;$

2) $f(z) = \dfrac{z+1}{z(z-1)},\ z_0 = 2-3i;$

3) $f(z) = \sin\dfrac{z}{z-1},\ z_0 = 1.$

19. Визначити тип особливих точок функції

1) $f(z) = \dfrac{z^2}{\cos z - 1};$

2) $f(z) = z^3 e^{\frac{7}{z^2}},\ z = 0;$

3) $f(z) = \dfrac{1}{\cos z}.$

20. За допомогою лишків обчислити інтеграли

1) $\displaystyle\oint\limits_{|z|=2} \frac{\sin z}{(z+1)^3}\,dz;$

2) $\displaystyle\oint\limits_{|z-1-i|=\frac{5}{4}} \frac{2}{z^2(z-1)}\,dz;$

3) $\displaystyle\oint\limits_{|z|=\frac{1}{2}} \frac{2-z^2+3z^3}{4z^3}dz;$

4) $\displaystyle\oint\limits_{|z|=1} \frac{\cos 3z - 1 + \frac{9z^2}{2}}{z^4 \operatorname{sh}\frac{9}{4}z}dz;$

5) $\displaystyle\int_0^{2\pi} \frac{dt}{4+\sqrt{15}\sin t};$

6) $\displaystyle\int_0^{2\pi} \frac{dt}{(\sqrt{5}+\cos t)^2};$

7) $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x-1}{(x^2+4)^2}dx;$

8) $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{(x-1)\sin x}{(x^2+9)^2}dx;$

9) $\displaystyle\oint\limits_{|z+6|=2} \left(z e^{\frac{1}{z+6}} + \frac{2\cos\frac{\pi z}{5}}{(z+5)^2(z+3)} \right) dz.$

21. Знайти відображення функцією $\omega = f(z)$ області D, заданої в комплексній площині z, на область D_1 в комплексній площині ω та дати графічну інтерпретацію

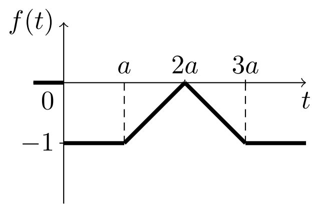
$$\omega = \frac{2z+1}{z+2};\ D : \begin{cases} |z| < 1; \\ y > 0. \end{cases}$$

22. Знайти зображення оригіналу

1) $f(t) = (t-1)\sin 2t;$

2) $f(t) = 3\cos(\frac{1}{2}t - 7);$

3)



23. Знайти оригінал за даним зображенням

$$F(p) = \frac{p}{(p+1)(p^2+p+1)}.$$

24. Розв'язати задачу Коші

1) $y' + 4y = 2(\eta(t) + \eta(t-1)),$
$y(0) = 0;$

2) $y'' - y' = \dfrac{1}{1+e^t},\ y(0) = y'(0) = 0;$

3) $y'' - y' = t^2,\ y(0) = 0,\ y'(0) = 1;$

4) $\begin{cases} x' = -x + 3y + 1, \\ y' = x + y, \end{cases}$
$x(0) = 1,\ y(0) = 2.$

25. Розв'язати інтегральне рівняння

$$y(x) = x - \int_0^x e^{x-t} y(t)dt.$$

Варіант 3

1. Звести до тригонометричної форми комплексне число

$$\left(1-\cos\frac{\pi}{5}+i\sin\frac{\pi}{5}\right)^{35}.$$

2. Подати в алгебраїчній формі

$$\left(\frac{2+2\sqrt{3}i}{1-i}\right)^{16}.$$

3. Знайти всі значення кореня та побудувати їх

$$\sqrt[4]{1+i}.$$

4. Зобразити множину точок

$$\{z\in\mathbb{C}\,|\,|z-i|\le 2,\quad \operatorname{Re} z>1\}.$$

5. Визначити вид кривої

$$z=-\sec t-i\,3\operatorname{tg}t.$$

6. Побудувати лінії та області, що задані співвідношенням

$$|z+2i|=|z|.$$

7. Знайти всі значення функції

1) $\sin iy,\ y\in\mathbb{R}$; 2) $\ln(2+3i)$;

3) $\operatorname{Arccos} 2i$; 4) $\operatorname{Ln} 6$.

8. Перевірити, чи є функція $f(z)$ аналітичною, якщо так, знайти її похідну

$$f(z)=e^{-y}\cos x+ie^{-y}\sin x.$$

9. Відновити аналітичну функцію $f(z)$, якщо

1) $\operatorname{Re} f(z)=3x+2y+1$;

2) $\operatorname{Im} f(z)=e^{x}(y\cos y+x\sin y)$, $f(0)=0$.

10. Знайти коефіцієнт розтягу та кут повороту в точці z_0, при відображенні комплексної площини, яке задається функцією

$$f(z)=\frac{z}{z+2i},\ z_0=-i.$$

11. Обчислити інтеграл $\int\limits_L \operatorname{Re}(z^2+1)dz$, де

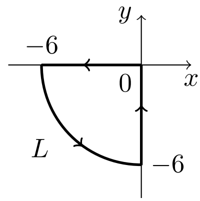
1) $L: y=x,\ 0\to 1+i$;

2) $L: y=x^2,\ 0\to 1+i$;

3) $L:$ ламана $z_1z_2z_3,\ z_1=0,\ z_2=1+i,\ z_3=1$.

12. Обчислити інтеграл $\oint\limits_C \operatorname{Re}(z^2+1)dz$ по контуру C, який складається з верхнього півкола $|z|=a$ та відрізка дійсної осі, з обходом контуру проти годинникової стрілки.

13. Обчислити $\oint\limits_L \operatorname{Im}(z^2+i)dz$, де крива L задана графічно:



14. Обчислити $\displaystyle\oint\limits_{|z-z_c|=R}\frac{dz}{z^2+9}$,

$$\begin{cases} R=2,\ z_c=2i;\\ R=2,\ z_c=-2i;\\ R=2,\ z_c=0\end{cases}$$

за допомогою теореми Коші, інтегральної формули Коші або формули для похідних.

15. Обчислити $\int\limits_0^{\pi i}\sin z dz$.

16. Обчислити $\int\limits_L \operatorname{Im} z^3 dz$, $L:\{y=x,\ 0\to 2+2i\}$.

17. Знайти радіус збіжності ряду

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{nz^n}{2^{in}}.$$

Варіант 3

18. Знайти всі лоранівські розвинення функції

1) $f(z) = \dfrac{3z - 18}{2z^3 + 3z^2 - 9z}, \ z_0 = 0;$

2) $f(z) = \dfrac{z+1}{z(z-1)}, \ z_0 = -3 - 2i;$

3) $f(z) = ze^{\frac{z}{z-5}}, \ z_0 = 5.$

19. Визначити тип особливих точок функції

1) $f(z) = \dfrac{1 - \sin z}{\cos z};$

2) $f(z) = \dfrac{\sin 8z - 6z}{\cos z - 1 + \frac{z^2}{2}}, \ z = 0;$

3) $f(z) = \operatorname{tg}^2 z.$

20. За допомогою лишків обчислити інтеграли

1) $\displaystyle\oint\limits_{|z|=\frac{1}{2}} z^2 \sin\frac{1}{z}\, dz;$

2) $\displaystyle\oint\limits_{|z-i|=\frac{3}{2}} \frac{dz}{z(z^2+4)};$ 3) $\displaystyle\oint\limits_{|z|=3} \frac{e^{\frac{1}{z}} + 1}{z}\, dz;$

4) $\displaystyle\oint\limits_{|z|=\frac{1}{2}} \frac{\operatorname{sh} 2\pi z - 2\pi z}{z^2 \sin^2 \frac{\pi^2 z}{3}}\, dz;$

5) $\displaystyle\int\limits_0^{2\pi} \frac{dt}{5 + 2\sqrt{6}\sin t};$

6) $\displaystyle\int\limits_0^{2\pi} \frac{dt}{\left(1 + \sqrt{\frac{6}{7}}\cos t\right)^2};$

7) $\displaystyle\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{(x^4+1)^2};$

8) $\displaystyle\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{\cos 2x}{(x^2+1)^2}\, dx;$

9) $\displaystyle\oint\limits_{|z-i|=3} \left(\frac{\pi}{e^{\frac{\pi z}{2}} - i} - \frac{2\operatorname{sh}\frac{\pi i z}{4+2i}}{(z-2-i)^2(z-4-i)} \right) dz.$

21. Знайти відображення функцією $\omega = f(z)$ області D, заданої в комплексній площині z, на область D_1 в комплексній площині ω та дати графічну інтерпретацію

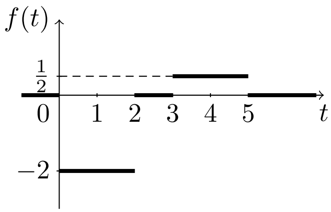
$$\omega = e^{2z}; \ D : \begin{cases} 0 < y < \frac{\pi}{2}; \\ x > 0. \end{cases}$$

22. Знайти зображення оригіналу

1) $f(t) = t^2 \sin 3t;$

2) $f(t) = \sin(4t + 5);$

3)



23. Знайти оригінал за даним зображенням

$$F(p) = \frac{2p}{(p^2 + 4p + 8)^2}.$$

24. Розв'язати задачу Коші

1) $2y' + y = \eta(t) - \eta(t-2), \ y(0) = 2;$

2) $y'' - 2y' + y = \dfrac{e^t}{1+t^2},$
$\quad y(0) = y'(0) = 0;$

3) $y'' + y' = t^2 + 2t, \ y(0) = 0, \ y'(0) = -2;$

4) $\begin{cases} x' = x + 4y, \\ y' = 2x - y + 9, \end{cases}$
$\quad x(0) = 1, \ y(0) = 0.$

25. Розв'язати інтегральне рівняння

$$\int\limits_0^x \operatorname{ch}(x-t)y(t)dt = x.$$

Варіант 4

1. Звести до тригонометричної форми комплексне число
$$\left(-\cos\frac{\pi}{9}+i\sin\frac{\pi}{9}\right)^{30}.$$

2. Подати в алгебраїчній формі
$$\left(\frac{4+4i}{1-i\sqrt{3}}\right)^{6}.$$

3. Знайти всі значення кореня та побудувати їх
$$\sqrt[4]{-i}.$$

4. Зобразити множину точок
$$\{z\in\mathbb{C}\,|\,|z+1|\geq 1,\quad |z+i|<1\}.$$

5. Визначити вид кривої
$$z=4\,\mathrm{tg}\,t-i\,3\sec t.$$

6. Побудувати лінії та області, що задані співвідношенням
$$|z+2|>|z|.$$

7. Знайти всі значення функції

1) $\mathrm{ch}\,iy,\ y\in\mathbb{R}$; 2) $\mathrm{Ln}\,(1+i)$;

3) $\mathrm{Arcsin}\,2i$; 4) $\mathrm{sh}\left(2+\dfrac{\pi i}{4}\right)$.

8. Перевірити, чи є функція $f(z)$ аналітичною, якщо так, знайти її похідну
$$f(z)=e^{x}\cos y+ie^{x}\sin y.$$

9. Відновити аналітичну функцію $f(z)$, якщо

1) $\mathrm{Im}\,f(z)=2x-y+4$;

2) $\mathrm{Re}\,f(z)=x^2-y^2-2y,\ f(0)=0$.

10. Знайти коефіцієнт розтягу та кут повороту в точці z_0, при відображенні комплексної площини, яке задається функцією
$$f(z)=e^{-3z},\ z_0=\frac{\pi i}{3}.$$

11. Обчислити інтеграл $\int\limits_L \mathrm{Re}\,(z^3+1)\,dz$, де

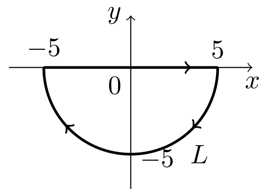
1) $L: y=x,\ 0\to 1+i$;

2) $L: y=x^2,\ 0\to 1+i$;

3) $L:$ ламана $z_1z_2z_3,\ z_1=0,\ z_2=1+i,\ z_3=1$.

12. Обчислити інтеграл $\oint\limits_C \mathrm{Re}\,(z^3+1)\,dz$ по контуру C, який складається з верхнього півкола $|z|=a$ та відрізка дійсної осі, з обходом контуру проти годинникової стрілки.

13. Обчислити $\oint\limits_L z^2\mathrm{Im}\,z\,dz$, де крива L задана графічно:



14. Обчислити $\displaystyle\oint\limits_{|z-z_c|=R}\frac{\sin z}{(z-i)^2}\,dz$,
$$\begin{cases} R=3,\ z_c=0;\\ R=\frac{1}{2},\ z_c=0\end{cases}$$
за допомогою теореми Коші, інтегральної формули Коші або формули для похідних.

15. Обчислити $\displaystyle\int\limits_{2-i}^{1+i} z\,dz$.

16. Обчислити $\int\limits_L (z^2+7z+1)\,dz$, $L:\{y=x,\ 1\to 1-i\}$.

17. Знайти радіус збіжності ряду
$$\sum_{n=0}^{\infty}\cos(in)z^n.$$

Варіант 4

18. Знайти всі лоранівські розвинення функції

1) $f(z) = \dfrac{2z-16}{z^4+2z^3-8z^2}$, $z_0 = 0$;

2) $f(z) = \dfrac{z+1}{z(z-1)}$, $z_0 = -2+i$;

3) $f(z) = \sin\dfrac{2z-z}{z+2}$, $z_0 = -2$.

19. Визначити тип особливих точок функції

1) $f(z) = \dfrac{z-\pi}{\sin^2 z}$;

2) $f(z) = \dfrac{\cos 7z - 1}{\operatorname{sh} z - z - \frac{z^3}{6}}$;

3) $f(z) = z \operatorname{tg} z\, e^{\frac{1}{z}}$.

20. За допомогою лишків обчислити інтеграли

1) $\displaystyle\oint\limits_{|z|=\frac{1}{3}} (z+1)e^{\frac{1}{z}}\, dz$;

2) $\displaystyle\oint\limits_{|z|=1} \frac{2\sin z}{z(z+2i)}dz$; 3) $\displaystyle\oint\limits_{|z|=2} \frac{\sin z^3}{1-\cos z}dz$;

4) $\displaystyle\oint\limits_{|z|=2} \frac{\operatorname{sh} 3z - 1 + \frac{9z^2}{2}}{z^4 \sin\frac{9z}{8}}\, dz$;

5) $\displaystyle\int\limits_0^{2\pi} \frac{dt}{6+\sqrt{35}\sin t}$;

6) $\displaystyle\int\limits_0^{2\pi} \frac{dt}{(2\sqrt{3}+\sqrt{11}\cos t)^2}$;

7) $\displaystyle\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{(x^2+4)^2(x^2+16)}$;

8) $\displaystyle\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{x^2\cos x}{(x^2+1)^2}\, dx$;

9) $\displaystyle\oint\limits_{|z+2|=2} \Big(z \operatorname{ch}\frac{1}{z+2} - \frac{2\sin\frac{\pi z}{2}}{(z+1)^2(z-1)}\Big)\, dz$.

21. Знайти відображення функцією $\omega = f(z)$ області D, заданої в комплексній площині z, на область D_1 в комплексній площині ω та дати графічну інтерпретацію

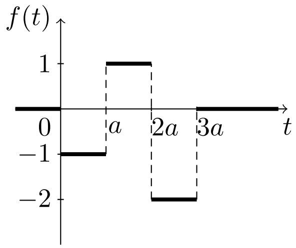
$$\omega = z^2,\ D : \begin{cases} |z| > \frac{1}{2}; \\ \operatorname{Re} z > 0. \end{cases}$$

22. Знайти зображення оригіналу

1) $f(t) = t(e^{-t} + \operatorname{ch} t)$;

2) $f(t) = 7\sin(6 + \frac{1}{8}t)$;

3)



23. Знайти оригінал за даним зображенням

$$F(p) = \frac{1}{p(p^2+1)^2}.$$

24. Розв'язати задачу Коші

1) $y'' + y = \eta(t) - 2\eta(t-1) + \eta(t-2)$, $y(0) = y'(0) = 0$;

2) $y'' - 2y' + 2y = 2e^t\cos t$, $y(0) = y'(0) = 0$;

3) $y'' - y = \cos 3t$, $y(0) = y'(0) = 1$;

4) $\begin{cases} x' = x + 2y + 1; \\ y' = 4x - y, \end{cases}$, $x(0) = 0,\ y(0) = 1$.

25. Розв'язати інтегральне рівняння

$$y(x) = \cos x + \int\limits_0^x (x-t)y(t)\, dt.$$

Варіант 5

1. Звести до тригонометричної форми комплексне число

$$\left(1+\cos\frac{\pi}{10}-i\sin\frac{\pi}{10}\right)^{55}.$$

2. Подати в алгебраїчній формі

$$\left(\frac{-\sqrt{3}-i}{\sqrt{2}-i\sqrt{2}}\right)^{15}.$$

3. Знайти всі значення кореня та побудувати їх

$$\sqrt[3]{-i}.$$

4. Зобразити множину точок

$$\{z\in\mathbb{C}\,|\,|z+1|<1,\quad |z-i|\le 1\}.$$

5. Визначити вид кривої

$$z=3\operatorname{tg}t+i\,4\sec t.$$

6. Побудувати лінії та області, що задані співвідношенням

$$3\le|z+2i|<4.$$

7. Знайти всі значення функції

1) $\operatorname{tg}2i$; 2) i^i;

3) $\operatorname{Arctg}i$; 4) $\operatorname{ch}\left(2+\dfrac{\pi i}{2}\right)$.

8. Перевірити, чи є функція $f(z)$ аналітичною, якщо так, знайти її похідну

$$f(z)=(x^3-3xy^2)+i(3x^2-y^3).$$

9. Відновити аналітичну функцію $f(z)$, якщо

1) $\operatorname{Re}f(z)=e^y\cos x$;

2) $\operatorname{Re}f(z)=\dfrac{e^{2x}+1}{e^x}$, $f(0)=2$.

10. Знайти коефіцієнт розтягу та кут повороту в точці z_0, при відображенні комплексної площини, яке задається функцією

$$f(z)=\cos 2z,\ z_0=2i.$$

11. Обчислити інтеграл $\int\limits_L z^2\bar{z}\,dz$

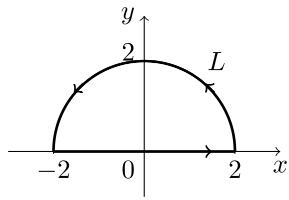
1) $L: y=x,\ 0\to 1+i$;

2) $L: y=x^2,\ 0\to 1+i$;

3) $L:$ ламана $z_1z_2z_3$, $z_1=0$, $z_2=1+i$, $z_3=1$.

12. Обчислити інтеграл $\oint\limits_C z^2\bar{z}\,dz$ по контуру C, який складається з верхнього півкола $|z|=a$ та відрізка дійсної осі, з обходом контуру проти годинникової стрілки.

13. Обчислити $\oint\limits_L(\operatorname{Re}z^3-10i)\,dz$, де крива L задана графічно:



14. Обчислити $\displaystyle\oint\limits_{|z+1|=2}\frac{e^z}{(z+2)^4}\,dz$ за допомогою теореми Коші, інтегральної формули Коші або формули для похідних.

15. Обчислити $\displaystyle\int\limits_0^{-2+\frac{\pi i}{2}}e^{-z}\,dz$.

16. Обчислити $\int\limits_L|z|\,dz$,

$L:$ ламана $z_1z_2z_3$, $z_1=0$, $z_2=-1+i$, $z_3=1+i$.

17. Знайти радіус збіжності ряду

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{z^n}{\operatorname{Ln}(in)}.$$

18. Знайти всі лоранівські розвинення функції

1) $f(z)=\dfrac{5z-50}{2z^3+5z^2-25z}$, $z_0=0$;

Варіант 5

2) $f(z)=\dfrac{z-1}{z(z+1)},\ z_0=1+3i;$

3) $f(z)=\cos\dfrac{3z}{z-i},\ z_0=i.$

19. Визначити тип особливих точок функції

1) $f(z)=\dfrac{1}{\cos z-\frac{1}{z}};$

2) $f(z)=\dfrac{\operatorname{sh}6z-6z}{\operatorname{ch}z-1-\frac{z^2}{2}};$

3) $f(z)=\dfrac{e^z-1}{z^3(z+1)^3}.$

20. За допомогою лишків обчислити інтеграли

1) $\displaystyle\oint\limits_C \frac{\cos\frac{z}{2}}{z^2-4}\,dz,\ C:\frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{4}=1;$

2) $\displaystyle\oint\limits_{|z-3|=\frac{1}{2}} \frac{e^z\,dz}{\sin z};$

3) $\displaystyle\oint\limits_{|z|=\frac{1}{3}} \frac{1-2z+3z^2+4z^3}{2z^2}\,dz;$

4) $\displaystyle\oint\limits_{|z|=\frac{1}{2}} \frac{e^{2z}-1-2z}{z\operatorname{sh}^2 4iz}\,dz;$

5) $\displaystyle\int\limits_0^{2\pi} \frac{dt}{7+4\sqrt{3}\sin t};$

6) $\displaystyle\int\limits_0^{2\pi} \frac{dt}{(3\sqrt{2}+2\sqrt{3}\cos t)^2};$

7) $\displaystyle\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{(x^2-x+1)^2};$

8) $\displaystyle\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{(x+1)\cos x}{x^4+5x^2+6}\,dx;$

9) $\displaystyle\oint\limits_{|z-2i|=2} \left(\frac{2\cos\frac{\pi z}{2+2i}}{(z-2-2i)^2(z-4-2i)}+\frac{\pi i}{e^{\frac{\pi z}{2}}+1}\right)dz.$

21. Знайти відображення функцією $\omega=f(z)$ області D, заданої в комплексній площині z, на область D_1 в комплексній площині ω та дати графічну інтерпретацію

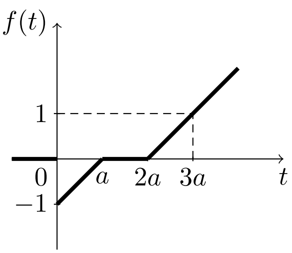
$$\omega=\frac{1}{2}\left(z+\frac{1}{z}\right),\ D:\begin{cases}|z|=1;\\ \operatorname{Im}z>0.\end{cases}$$

22. Знайти зображення оригіналу

1) $f(t)=\int\limits_0^t e^r r^4\,dr;$

2) $f(t)=\frac{5}{9}(\sin\frac{9}{13}t-11);$

3)



23. Знайти оригінал за даним зображенням

$$F(p)=\frac{p+3}{p^3+2p^2+3p}.$$

24. Розв'язати задачу Коші

1) $y'+3y=2\eta(t)-\eta(t-1),\ y(0)=3;$

2) $y''-y=\operatorname{th}^2 t,\ y(0)=y'(0)=0;$

3) $y''+y'+y=7e^{2t},\ y(0)=1,\ y'(0)=4;$

4) $\begin{cases}x'=2x+5y,\\ y'=x-2y+2,\end{cases}$
$x(0)=1,\ y(0)=1.$

25. Розв'язати інтегральне рівняння

$$y(x)=e^{2x}+\int\limits_0^x e^{t-x}y(t)\,dt.$$

Варіант 6

1. Звести до тригонометричної форми комплексне число

$$\left(\sin\frac{\pi}{18}+i\cos\frac{\pi}{18}\right)^{33}.$$

2. Подати в алгебраїчній формі

$$\left(\frac{1-i}{\sqrt{2}+i\sqrt{2}}\right)^{5}.$$

3. Знайти всі значення кореня та побудувати їх

$$\sqrt[4]{2}.$$

4. Зобразити множину точок

$$\{z\in\mathbb{C}\,|\,|z+i|\le 2,\quad |z-i|>2\}.$$

5. Визначити вид кривої

$$z=-4\operatorname{tg}t-i\,2\sec t.$$

6. Побудувати лінії та області, що задані співвідношенням

$$|1+z|=|z+i|.$$

7. Знайти всі значення функції
1) $\operatorname{ctg}(1-i)$; 2) i^{i+1};
3) $\operatorname{Arctg}2i$; 4) $\operatorname{Ln}(1+i)$.

8. Перевірити, чи є функція $f(z)$ аналітичною, якщо так, знайти її похідну

$$f(z)=x(x^2+y^2)+iy(x^2+y^2).$$

9. Відновити аналітичну функцію $f(z)$, якщо
1) $\operatorname{Im}f(z)=e^{-x}\cos y$;
2) $\operatorname{Re}f(z)=\dfrac{x}{x^2+y^2}$, $f(1)=1+i$.

10. Знайти коефіцієнт розтягу та кут повороту в точці z_0, при відображенні комплексної площини, яке задається функцією

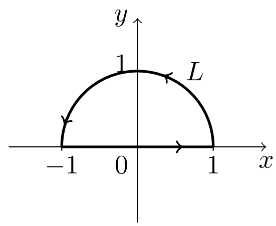
$$f(z)=\sin 3z,\ z_0=i.$$

11. Обчислити інтеграл $\int\limits_L \bar{z}^2\,dz$

1) $L: y=x,\ 0\to 1+i$;
2) $L: y=x^2,\ 0\to 1+i$;
3) $L:$ ламана $z_1z_2z_3$, $z_1=0$, $z_2=1+i$, $z_3=1$.

12. Обчислити інтеграл $\oint\limits_C \bar{z}^2\,dz$ по контуру C, який складається з верхнього півкола $|z|=a$ та відрізка дійсної осі, з обходом контуру проти годинникової стрілки.

13. Обчислити $\oint\limits_L(2\bar{z}+\operatorname{Re}z)\,dz$, де крива L задана графічно:



14. Обчислити $\displaystyle\oint\limits_{|z-z_c|=R}\frac{e^z}{z(1-z)^2}\,dz$,

$$\begin{cases} R>2,\ z_c=2;\\ R=2,\ z_c=-1\end{cases}$$

за допомогою теореми Коші, інтегральної формули Коші або формули для похідних.

15. Обчислити $\int\limits_0^{\pi i}\cos z\,dz$.

16. Обчислити $\int\limits_L(12z^5+4z^3+1)\,dz$, $L:\ y=x,\ 1\to i$.

17. Знайти радіус збіжності ряду

$$\sum_{n=0}^{\infty}e^{in^2}\left(\frac{z}{2}\right)^n.$$

Варіант 6

18. Знайти всі лоранівські розвинення функції

1) $f(z) = \dfrac{3z-36}{z^4+3z^3-18z^2}$, $z_0 = 0$;

2) $f(z) = \dfrac{z-1}{z(z+1)}$, $z_0 = 2-i$;

3) $f(z) = \sin\dfrac{5z}{z-2i}$, $z_0 = 2i$.

19. Визначити тип особливих точок функції

1) $f(z) = z^2 \sin\dfrac{1}{z}$;

2) $f(z) = \dfrac{\operatorname{ch} 5z - 1}{e^z - 1 - z}$, $z = 0$;

3) $f(z) = \dfrac{z^2+1}{(z-i)^2(z^2+4)}$.

20. За допомогою лишків обчислити інтеграли

1) $\displaystyle\oint\limits_{|z-i|=3} \frac{e^{z^2}-1}{z^3-iz^2}\,dz$;

2) $\displaystyle\oint\limits_{|z-\frac{3}{2}|=2} \frac{z(\sin z+2)}{\sin z}\,dz$;

3) $\displaystyle\oint\limits_{|z|=2} \frac{1-\cos z^2}{z^2}\,dz$;

4) $\displaystyle\oint\limits_{|z|=\frac{2}{5}} \frac{e^{4z}-\cos 7z}{z \operatorname{sh} 2\pi z}\,dz$;

5) $\displaystyle\int\limits_0^{2\pi} \frac{dt}{5-4\sin t}$; 6) $\displaystyle\int\limits_0^{2\pi} \frac{dt}{(4+\cos t)^2}$;

7) $\displaystyle\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{(x^2+4)(x^2+9)^2}$;

8) $\displaystyle\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{x\sin\frac{x}{2}\,dx}{(x^2+1)(x^2+9)}$;

9) $\displaystyle\oint\limits_{|z+3|=2} \left(z \operatorname{sh}\frac{i}{z+3} - \frac{4\operatorname{sh}\frac{\pi i z}{4}}{(z+2)^2 z}\right) dz$.

21. Знайти відображення функцією $\omega = f(z)$ області D, заданої в комплексній площині z, на область D_1 в комплексній площині ω та дати графічну інтерпретацію

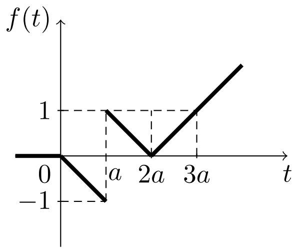
$$\omega = z^3,\ D : \begin{cases} x^2+y^2 \le 1; \\ 0 < \arg z < \frac{\pi}{6}. \end{cases}$$

22. Знайти зображення оригіналу

1) $f(t) = e^{-t}\cos 2t$;

2) $f(t) = 5\sin(2t+12)$;

3)



23. Знайти оригінал за даним зображенням

$$F(p) = \frac{p}{(p+1)(p^2+4p+5)}.$$

24. Розв'язати задачу Коші

1) $y'' + y = \eta(t) + \eta(t-2)$,
$y(0) = 1,\ y'(0) = 0$;

2) $y'' - y = \dfrac{1}{\operatorname{ch} t}$, $y(0) = y'(0) = 0$;

3) $y'' + y' - 2y = -2(t+1)$,
$y(0) = y'(0) = 1$;

4) $\begin{cases} x' = -2x + 5y + 1, \\ y' = x + 2y + 1, \end{cases}$
$x(0) = 0,\ y(0) = 2$.

25. Розв'язати інтегральне рівняння

$$\int\limits_0^x \sin(x-t)y(t)\,dt = x^3(x-1).$$

Варіант 7

1. Звести до тригонометричної форми комплексне число

$$\left(1-\cos\frac{\pi}{13}-i\sin\frac{\pi}{13}\right)^{65}.$$

2. Подати в алгебраїчній формі

$$\left(\frac{1-i\sqrt{3}}{i-1}\right)^{5}.$$

3. Знайти всі значення кореня та побудувати їх

$$\sqrt[5]{4}.$$

4. Зобразити множину точок

$$\{z\in\mathbb{C}\,|\,|z-1-i|\le 1,\ \operatorname{Im}z>1,\operatorname{Re}z\ge 1\}$$

5. Визначити вид кривої

$$z=3\operatorname{cosec}t+i\,3\operatorname{ctg}t.$$

6. Побудувати лінії та області, що задані співвідношенням

$$|z-1+i|\le 2.$$

7. Знайти всі значення функції

1) $\sin(1+2i)$; 2) 2^{i};

3) $\operatorname{Arcsin} i$; 4) $\sin\left(\dfrac{\pi}{3}+i\right)$.

8. Перевірити, чи є функція $f(z)$ аналітичною, якщо так, знайти її похідну

$$f(z)=(x^2-y^2-2x)+i2y(x-1).$$

9. Відновити аналітичну функцію $f(z)$, якщо

1) $\operatorname{Re} f(z)=\operatorname{sh}x\cos y$;

2) $\operatorname{Im} f(z)=e^{-y}\sin x+y,\ f(0)=1$.

10. Знайти коефіцієнт розтягу та кут повороту в точці z_0, при відображенні комплексної площини, яке задається функцією

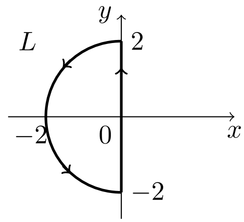
$$f(z)=2z^2+5,\ z_0=\sqrt{3}-i.$$

11. Обчислити інтеграл $\int\limits_L (i\operatorname{Re}z)^2\,dz$,

1) $L: y=x,\ 0\to 1+i$;
2) $L: y=x^2,\ 0\to 1+i$;
3) $L:$ ламана $z_1z_2z_3$, $z_1=0$, $z_2=1+i$, $z_3=1$.

12. Обчислити інтеграл $\oint\limits_C (i\operatorname{Re}z)^2\,dz$ по контуру C, який складається з верхнього півкола $|z|=a$ та відрізка дійсної осі, з обходом контуру проти годинникової стрілки.

13. Обчислити $\oint\limits_L |\bar z|\,dz$, де крива L задана графічно:



14. Обчислити

$$\oint\limits_{|z-z_c|=R}\frac{dz}{(z+1)^3(z-1)},$$

$$\begin{cases} R=2,\ z_c=2;\\ R=2,\ z_c=-2\end{cases}$$

за допомогою теореми Коші, інтегральної формули Коші або формули для похідних.

15. Обчислити $\int\limits_{1+i}^{3+i}(z+1)\,dz$.

16. Обчислити $\int\limits_L \bar z^2\,dz$,

$L:\ y=x,\ 0\to 1+i$.

17. Знайти радіус збіжності ряду

$$\sum_{n=0}^{\infty}(1+n)!\left(\frac{z}{in}\right)^{n}.$$

Варіант 7

18. Знайти всі лоранівські розвинення функції

1) $f(z) = \dfrac{7z-98}{2z^3+7z^2-49z}$, $z_0 = 0$;

2) $f(z) = \dfrac{z-1}{z(z+1)}$, $z_0 = -1+2i$;

3) $f(z) = \sin\dfrac{3z-i}{3z+i}$, $z_0 = -\frac{i}{3}$.

19. Визначити тип особливих точок функції

1) $f(z) = (z-1)\cos\dfrac{1}{(z-1)^2}$;

2) $f(z) = z\sin\dfrac{6}{z^2}$, $z = 0$;

3) $f(z) = \dfrac{(z+\pi)\sin\frac{\pi}{2}z}{z\sin^2 z}$.

20. За допомогою лишків обчислити інтеграли

1) $\displaystyle\oint\limits_{|z|=3} \frac{dz}{z^5+z^3}$; 2) $\displaystyle\oint\limits_{|z-1|=3} \frac{z\,e^z}{\sin z}\,dz$;

3) $\displaystyle\oint\limits_{|z|=1} \frac{3z^4-2z^3+5}{z^4}\,dz$;

4) $\displaystyle\oint\limits_{|z|=\frac{1}{5}} \frac{e^{8z}\,\mathrm{ch}\,4z}{z\sin 4\pi z}\,dz$;

5) $\displaystyle\int\limits_0^{2\pi} \frac{dt}{7+4\sqrt{3}\sin t}$; 6) $\displaystyle\int\limits_0^{2\pi} \frac{dt}{(4+3\cos t)^2}$;

7) $\displaystyle\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{x^4+10x^2+9}$;

8) $\displaystyle\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{(x^2+3)\cos 2x}{x^4+3x^2+2}\,dx$;

9) $\displaystyle\oint\limits_{|z+5i|=2} \Bigg(\frac{\pi i}{e^{\frac{\pi z}{2}}+i}+$

$\displaystyle+\frac{8\,\mathrm{ch}\,\frac{\pi i z}{1-5i}}{(z-1+5i)^2(z-3+5i)}\Bigg)\,dz.$

21. Знайти відображення функцією $\omega = f(z)$ області D, заданої в комплексній площині z, на область D_1 в комплексній площині ω та дати графічну інтерпретацію

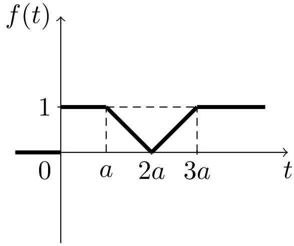
$$\omega = \frac{z-1}{2z-6},\ D:\ |z-1| < 2.$$

22. Знайти зображення оригіналу

1) $f(t) = e^t\sin^2 t$;

2) $f(t) = \mathrm{ch}\,(8t-3)$;

3)



23. Знайти оригінал за даним зображенням

$$F(p) = \frac{6}{p^3-8}.$$

24. Розв'язати задачу Коші

1) $y'' + 2y' + 2y = \eta(t) - \eta(t-2)$,
$y(0) = y'(0) = 0$;

2) $y'' - y' = \dfrac{e^t}{1+e^t}$, $y(0) = y'(0) = 0$;

3) $y'' - 9y = \sin t - \cos t$,
$y(0) = -3$, $y'(0) = 2$;

4) $\begin{cases} x' = 3x + y; \\ y' = -5x - 3y + 2, \end{cases}$
$x(0) = 2,\ y(0) = 0.$

25. Розв'язати інтегральне рівняння

$$y(x) = e^x + \int\limits_0^x y(t)\,dt.$$

Варіант 8

1. Звести до тригонометричної форми комплексне число

$$\left(\sin\frac{\pi}{5} - i\cos\frac{\pi}{5}\right)^{55}.$$

2. Подати в алгебраїчній формі

$$\left(\frac{i\sqrt{2}-\sqrt{2}}{\sqrt{3}+i}\right)^6.$$

3. Знайти всі значення кореня та побудувати їх

$$\sqrt[3]{-1+i}.$$

4. Зобразити множину точок
$\{z \in \mathbb{C} \,|\, |z-1+i| \geq 1,\ \mathrm{Re}\, z < 1,$
$\mathrm{Im}\, z \leq -1\}.$

5. Визначити вид кривої

$$z = 4\,\mathrm{cosec}\, t - i\,2\,\mathrm{ctg}\, t.$$

6. Побудувати лінії та області, що задані співвідношенням

$$|z| > 2 + \mathrm{Im}\, z.$$

7. Знайти всі значення функції
1) $\mathrm{sh}\, iy,\ y \in \mathbb{R}$; 2) $e^{-2+\frac{\pi i}{3}}$;
3) $\mathrm{Arcsin}\,(2-i)$; 4) $\cos\left(\frac{\pi}{4}+i\right)$.

8. Перевірити, чи є функція $f(z)$ аналітичною, якщо так, знайти її похідну

$$f(z) = (x^2 - y^2 + 2x) + i(4xy + 2y).$$

9. Відновити аналітичну функцію $f(z)$, якщо
1) $\mathrm{Im}\, f(z) = -\mathrm{sh}\, x \sin y$;
2) $\mathrm{Im}\, f(z) = e^x \cos y,\ f(0) = 1 + i$.

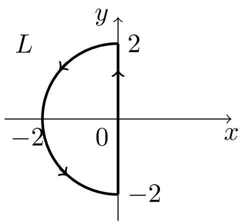
10. Знайти коефіцієнт розтягу та кут повороту в точці z_0, при відображенні комплексної площини, яке задається функцією

$$f(z) = 2z^3 + 4,\ z_0 = i - 1.$$

11. Обчислити інтеграл $\int\limits_L (\mathrm{Re}\, z + \mathrm{Im}\, z)\, dz$, де
1) $L: y = x,\ 0 \to 1+i$;
2) $L: y = x^2,\ 0 \to 1+i$;
3) $L:$ ламана $z_1z_2z_3,\ z_1 = 0,\ z_2 = 1+i,\ z_3 = 1$.

12. Обчислити інтеграл $\oint\limits_C (\mathrm{Re}\, z + \mathrm{Im}\, z)\, dz$ по контуру C, який складається з верхнього півкола $|z| = a$ та відрізка дійсної осі, з обходом контуру проти годинникової стрілки.

13. Обчислити $\oint\limits_L \mathrm{Re}\, z^2\, dz$, де крива L задана графічно:



14. Обчислити $\displaystyle\oint\limits_{|z-z_c|=R} \frac{z^2}{(z-2i)^2}\, dz,$

$$\begin{cases} R = 3,\ z_c = 0; \\ R = 1,\ z_c = 0 \end{cases}$$

за допомогою теореми Коші, інтегральної формули Коші або формули для похідних.

15. Обчислити $\displaystyle\int\limits_0^{1+i} z^3\, dz.$

16. Обчислити $\int\limits_L z^3 e^{z^4}\, dz$, де $L:$ ламана $z_1z_2z_3,\ z_1 = i,\ z_2 = 1,\ z_3 = 0$.

17. Знайти радіус збіжності ряду

$$\sum_{n=0}^{\infty} 3^{in} z^n.$$

Варіант 8

18. Знайти всі лоранівські розвинення функції

1) $f(z) = \dfrac{4z-64}{z^4+4z^3-32z^2},\ z_0 = 0;$

2) $f(z) = \dfrac{z-1}{z(z+1)},\ z_0 = -2-3i;$

3) $f(z) = z\cos\dfrac{3z}{z-i},\ z_0 = 1.$

19. Визначити тип особливих точок функції

1) $f(z) = \mathrm{tg}^2\, 2z;$

2) $f(z) = \dfrac{e^z-1}{\sin z - z + \frac{z^3}{6}},\ z = 0;$

3) $f(z) = \mathrm{tg}\,\dfrac{1}{z}.$

20. За допомогою лишків обчислити інтеграли

1) $\displaystyle\oint\limits_{|z|=5} \frac{z\,dz}{1-\cos z}$; 2) $\displaystyle\oint\limits_{|z-\frac{3}{2}|=2} \frac{2z|z-1|}{\sin z}dz;$

3) $\displaystyle\oint\limits_{|z|=3} \frac{1-\sin\frac{1}{z}}{z}\,dz;$

4) $\displaystyle\oint\limits_{|z|=\frac{1}{10}} \frac{\mathrm{ch}\, z - \cos 3z}{z^2 \sin 5\pi z}\,dz;$

5) $\displaystyle\int\limits_0^{2\pi} \frac{dt}{8-3\sqrt{7}\sin t};$

6) $\displaystyle\int\limits_0^{2\pi} \frac{dt}{(\sqrt{5}+\sqrt{3}\cos t)^2};$

7) $\displaystyle\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{(x^2+9)(x^2+4)^2};$

8) $\displaystyle\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{(x^3-2)\cos\frac{x}{2}}{(x^2+1)^2}\,dx;$

9) $\displaystyle\oint\limits_{|z+2|=2} \Big(z\cos\frac{1}{z+4} + \frac{2\sin\frac{\pi z}{6}}{(z+3)^2(z+1)}\Big)\,dz.$

21. Знайти відображення функцією $\omega = f(z)$ області D, заданої в комплексній площині z, на область D_1 в комплексній площині ω та дати графічну інтерпретацію

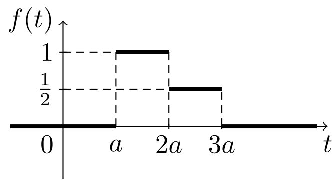
$$\omega = e^{iz},\ D : \begin{cases} 0 < x < \pi; \\ y > 0. \end{cases}$$

22. Знайти зображення оригіналу

1) $f(t) = t\sin 2t\,\mathrm{sh}\, 3t;$

2) $f(t) = \mathrm{ch}\,(\frac{6}{8}t + 22);$

3)



23. Знайти оригінал за даним зображенням

$$F(p) = \frac{4}{p^3+8}.$$

24. Розв'язати задачу Коші

1) $y'' + 3y' = \eta(t-1),$
$y(0) = 4,\ y'(0) = 0;$

2) $y'' - 2y' + y = \dfrac{e^t}{t+1},\ y(0) = y'(0) = 0;$

3) $y'' + 2y' = 2 + e^t,\ y(0) = 1,\ y'(0) = 2;$

4) $\begin{cases} x' = -3x - 4y + 1, \\ y' = 2x + 3y, \end{cases}$
$x(0) = 0,\ y(0) = 2.$

25. Розв'язати інтегральне рівняння

$$y(x) = 1 + \frac{1}{2}\int\limits_0^x \sin 2(x-t)y(t)\,dt.$$

Варіант 9

1. Звести до тригонометричної форми комплексне число

$$\left(\sin\frac{\pi}{12}+i+i\cos\frac{\pi}{12}\right)^{52}.$$

2. Подати в алгебраїчній формі

$$\left(\frac{i-1}{i+\sqrt{3}}\right)^{12}.$$

3. Знайти всі значення кореня та побудувати їх

$$\sqrt[4]{-16i}.$$

4. Зобразити множину точок

$$\{z\in\mathbb{C}\,|\,|z-2-i|\le 2,\ \mathrm{Re}\,z\ge 3,\ \mathrm{Im}\,z<1\}.$$

5. Визначити вид кривої

$$z=\mathrm{ctg}\,t-i\,2\,\mathrm{cosec}\,t.$$

6. Побудувати лінії та області, що задані співвідношенням

$$|z+i|=|z-i|.$$

7. Знайти всі значення функції

1) $\mathrm{tg}\,(2-i)$;

2) $\ln(4i-3),\ \mathrm{Ln}\,(4i-3)$;

3) $\mathrm{Arcsin}\,(i-1)^4$; 4) $\mathrm{Ln}\,(\sqrt{3}+i)$.

8. Перевірити, чи є функція $f(z)$ аналітичною, якщо так, знайти її похідну

$$f(z)=(4xy-y)-i(2x^2-x-2y^2).$$

9. Відновити аналітичну функцію $f(z)$, якщо

1) $\mathrm{Re}\,f(z)=\cos x\,\mathrm{ch}\,y$;

2) $\mathrm{Im}\,f(z)=-\dfrac{y}{(x+1)^2+y^2},\ f(0)=1$.

10. Знайти коефіцієнт розтягу та кут повороту в точці z_0, при відображенні комплексної площини, яке задається функцією

$$f(z)=\frac{z+2}{z-i},\ z_0=-i.$$

11. Обчислити інтеграл $\int\limits_L |z|^2\,dz$

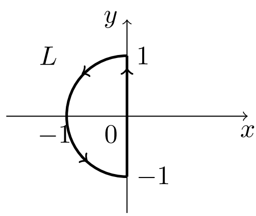
1) $L: y=x,\ 0\to 1+i$;

2) $L: y=x^2,\ 0\to 1+i$;

3) $L:$ ламана $z_1z_2z_3,\ z_1=0,\ z_2=1+i,\ z_3=1$.

12. Обчислити інтеграл $\oint\limits_C |z|^2\,dz$ по контуру C, який складається з верхнього півкола $|z|=a$ та відрізка дійсної осі, з обходом контуру проти годинникової стрілки.

13. Обчислити $\oint\limits_L \dfrac{\bar{z}}{z}\,dz$, де крива L задана графічно:



14. Обчислити $\oint\limits_{|z-z_c|=R}\dfrac{dz}{z(z^2-1)}$,

$$\begin{cases} R<2,\ z_c=2;\\ R>2,\ z_c=-2;\\ R<2,\ z_c=0\end{cases}$$

за допомогою теореми Коші, інтегральної формули Коші або формули для похідних.

15. Обчислити $\int\limits_0^{1+\pi i} e^{2z}\,dz$.

16. Обчислити $\int\limits_{z_1z_2z_3}\mathrm{Re}\,\dfrac{\bar{z}}{z}\,dz$, де $z_1z_2:\{|z|=1,\ \mathrm{Im}\,z\ge 0\}$, $z_2z_3: y=x,\ 1\to 2$.

17. Знайти радіус збіжності ряду

$$\sum_{n=1}^{\infty}\cos^2(in)z^n.$$

Варіант 9

18. Знайти всі лоранівські розвинення функції

1) $f(z) = \dfrac{9z - 162}{2z^3 + 9z^2 - 81z},\ z_0 = 0;$

2) $f(z) = \dfrac{z+3}{z^2 - 1},\ z_0 = 2 + i;$

3) $f(z) = z \sin \dfrac{z}{z-1},\ z_0 = 1.$

19. Визначити тип особливих точок функції

1) $f(z) = \dfrac{1}{z^3(z^2+4)^2};$

2) $f(z) = \dfrac{\sin z^2 - z^2}{\cos z - 1 + \frac{z^2}{2}},\ z = 0;$

3) $f(z) = \operatorname{ctg} \dfrac{1}{z}.$

20. За допомогою лишків обчислити інтеграли

1) $\displaystyle\oint\limits_{|z|=3} \frac{e^z}{z^4(z^2-1)}\, dz;$

2) $\displaystyle\oint\limits_{|z-\frac{1}{4}|=\frac{1}{3}} \frac{z(z+1)^2}{\sin 2\pi z}\, dz;$

3) $\displaystyle\oint\limits_{|z|=\frac{1}{2}} \frac{e^{2z^2} - 1}{z^3}\, dz;$

4) $\displaystyle\oint\limits_{|z|=1} \frac{\operatorname{sh} 3z - \sin 3z}{z^3 \operatorname{sh} 2z}\, dz;$

5) $\displaystyle\int\limits_0^{2\pi} \frac{dt}{9 - 4\sqrt{5}\sin t};$ 6) $\displaystyle\int\limits_0^{2\pi} \frac{dt}{(\sqrt{7} + 2\cos t)^2};$

7) $\displaystyle\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{x^2\, dx}{(x^3+3)^2};$

8) $\displaystyle\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{(x^2 - x)\sin x}{x^4 + 9x^2 + 20}\, dx;$

9) $\displaystyle\oint\limits_{|z-7i|=2} \left(\frac{2\sin\frac{\pi i z}{2+14i}}{(z-1-7i)^2(z-3-7i)} + \frac{\pi}{e^{\frac{\pi z}{2}} + i} \right) dz.$

21. Знайти відображення функцією $\omega = f(z)$ області D, заданої в комплексній площині z, на область D_1 в комплексній площині ω та дати графічну інтерпретацію

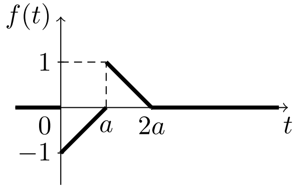
$$\omega = \frac{1}{z},\ D : \begin{cases} x^2 + y^2 < x; \\ y > \frac{1}{2}x. \end{cases}$$

22. Знайти зображення оригіналу

1) $f(t) = t \cos t \operatorname{ch} 2t;$

2) $f(t) = \operatorname{sh}(6 + 7t);$

3)



23. Знайти оригінал за даним зображенням

$$F(p) = \frac{1}{p^5 + p^3}.$$

24. Розв’язати задачу Коші

1) $y' + 3y = \eta(t) - 2\eta(t-1) + 2\eta(t-2),$
$y(0) = 0;$

2) $y'' + y' = \dfrac{e^{2t}}{3 + e^t},\ y(0) = y'(0) = 0;$

3) $2y'' - y' = \sin 3t,\ y(0) = 2,\ y'(0) = 1;$

4) $\begin{cases} x' = -2x + 6y + 1, \\ y' = 2x + 2, \end{cases}$
$x(0) = 0,\ y(0) = 1.$

25. Розв’язати інтегральне рівняння

$$y(x) = \cos x + \int\limits_0^x y(t)\, dt.$$

Варіант 10

1. Звести до тригонометричної форми комплексне число

$$\left(\sin\frac{\pi}{8}+i-i\cos\frac{\pi}{8}\right)^{48}.$$

2. Подати в алгебраїчній формі

$$\left(\frac{\sqrt{2}-i\sqrt{2}}{1+i}\right)^{12}.$$

3. Знайти всі значення кореня та побудувати їх

$$\sqrt[4]{-2+i}.$$

4. Зобразити множину точок

$$\{z\in\mathbb{C}\,|\,|z-1-i|\ge 1,\ 0\le \operatorname{Re} z<2,\ 0<\operatorname{Im} z<2\}.$$

5. Визначити вид кривої

$$z=-\operatorname{ctg} t+i\,3\operatorname{cosec} t.$$

6. Побудувати лінії та області, що задані співвідношенням

$$|z|>|z+1|.$$

7. Знайти всі значення функції

1) $\operatorname{ctg}(1+i)$; 2) 3^i;

3) $\operatorname{Arccos}(i-1)$; 4) $\operatorname{sh}\left(1+\dfrac{\pi i}{2}\right)$.

8. Перевірити, чи є функція $f(z)$ аналітичною, якщо так, знайти її похідну

$$f(z)=(3x^2y+2x)+i(4xy^2+2y).$$

9. Відновити аналітичну функцію $f(z)$, якщо

1) $\operatorname{Im} f(z)=\sin x\operatorname{sh} y$;

2) $\operatorname{Im} f(z)=y-\dfrac{y}{x^2+y^2},\ f(1)=2.$

10. Знайти коефіцієнт розтягу та кут повороту в точці z_0, при відображенні комплексної площини, яке задається функцією

$$f(z)=e^{-5z},\ z_0=\frac{\pi i}{10}.$$

11. Обчислити інтеграл $\int\limits_L \operatorname{Re}(\bar z^3+i)\,dz$,

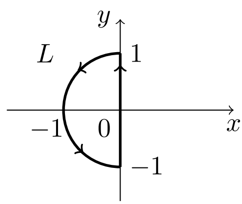
1) $L: y=x,\ 0\to 1+i$;

2) $L: y=x^2,\ 0\to 1+i$;

3) $L:$ ламана $z_1z_2z_3,\ z_1=0,\ z_2=1+i,\ z_3=1.$

12. Обчислити інтеграл $\oint\limits_C \operatorname{Re}(\bar z^3+i)\,dz$ по контуру C, який складається з верхнього півкола $|z|=a$ та відрізка дійсної осі, з обходом контуру проти годинникової стрілки.

13. Обчислити $\oint\limits_L z\operatorname{Im} z^2\,dz$, де крива L задана графічно:



14. Обчислити

$$\oint\limits_{|z-z_c|=R}\frac{2z-1-i}{(z-1)(z-i)}\,dz,$$

$$\left\{\begin{array}{l} R=2,\ z_c=0;\\ R=1,\ z_c=i\end{array}\right.$$

за допомогою теореми Коші, інтегральної формули Коші або формули для похідних.

15. Обчислити $\int\limits_0^{\frac{\pi i}{2}}\sin 2z\,dz.$

16. Обчислити $\int\limits_{z_1z_2z_3}(z^2+\cos z)\,dz$,

$z_1z_2z_3$ – ламана, $z_1=0,\ z_2=1,\ z_3=i.$

17. Знайти радіус збіжності ряду

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}e^{\frac{\pi i}{n}}z^n.$$

Варіант 10

18. Знайти всі лоранівські розвинення функції

1) $f(z) = \dfrac{5z - 100}{z^4 + 5z^3 - 50z^2}$, $z_0 = 0$;

2) $f(z) = \dfrac{z+3}{z^2 - 1}$, $z_0 = 3 - i$;

3) $f(z) = (z-3)\cos\pi\dfrac{z-3}{z}$, $z_0 = 0$.

19. Визначити тип особливих точок функції

1) $f(z) = z^2 e^{\frac{1}{z}}$;

2) $f(z) = \dfrac{\cos z^2 - 1}{\operatorname{sh} z - z - \frac{z^3}{6}}$, $z = 0$;

3) $f(z) = \dfrac{1}{e^z + 1}$.

20. За допомогою лишків обчислити інтеграли

1) $\displaystyle\oint\limits_{|z|=\frac{2}{3}} \left(\sin\frac{1}{z^2} + e^{z^2}\cos z\right) dz$;

2) $\displaystyle\oint\limits_{|z-\frac{1}{2}|=1} \frac{iz(z-i)}{\sin\pi z}\, dz$;

3) $\displaystyle\oint\limits_{|z|=\frac{1}{3}} \frac{3 - 2z + 4z^4}{z^3}\, dz$;

4) $\displaystyle\oint\limits_{|z|=0{,}05} \frac{e^{4z} - 1 - \sin 4z}{z^3 \operatorname{sh} 16\pi z}\, dz$;

5) $\displaystyle\int\limits_0^{2\pi} \frac{dt}{4 - \sqrt{7}\sin t}$; 6) $\displaystyle\int\limits_0^{2\pi} \frac{dt}{(4 + \sqrt{7}\cos t)^2}$;

7) $\displaystyle\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{(x^2+2)(x^2+3)^2}$;

8) $\displaystyle\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{x\cos x}{x^2 - 2x + 2}\, dx$;

9) $\displaystyle\oint\limits_{|z+5|=2} \left(z\sin\frac{i}{z+5} - \frac{4\operatorname{ch}\frac{\pi i z}{4}}{(z+4)^2(z+2)}\right) dz$.

21. Знайти відображення функцією $\omega = f(z)$ області D, заданої в комплексній площині z, на область D_1 в комплексній площині ω та дати графічну інтерпретацію

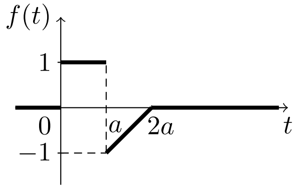
$$\omega = \frac{z+1}{z-2},\ D:\ |z-1| < 2.$$

22. Знайти зображення оригіналу

1) $f(t) = \dfrac{e^{-t}\sin 3t}{t}$;

2) $f(t) = 3\operatorname{sh}(16 + 7t)$;

3)



23. Знайти оригінал за даним зображенням

$$F(p) = \frac{p+4}{p^2 + 4p + 5}.$$

24. Розв'язати задачу Коші

1) $y' - y = -2\eta(t) + 2\eta(t-2) + \frac{1}{2}\eta(t-3) - \frac{1}{2}\eta(t-5)$, $y(0) = 0$;

2) $y'' - 2y' = \dfrac{e^t}{\operatorname{ch} t}$, $y(0) = y'(0) = 0$;

3) $y'' + 2y' = \sin\dfrac{t}{2}$, $y(0) = 2$, $y'(0) = 4$;

4) $\begin{cases} x' = 2x + 3y + 1; \\ y' = 4x - 2y, \end{cases}$
$x(0) = -1$, $y(0) = 6$.

25. Розв'язати інтегральне рівняння

$$\int\limits_0^x e^{x-t} y(t)\, dt = x^2.$$

Варіант 11

1. Звести до тригонометричної форми комплексне число

$$\left(\cos\frac{\pi}{12} - i\sin\frac{\pi}{12}\right)^{62}.$$

2. Подати в алгебраїчній формі

$$\left(\frac{i-\sqrt{3}}{\sqrt{3}+i}\right)^{10}.$$

3. Знайти всі значення кореня та побудувати їх

$$\sqrt[3]{i-1}.$$

4. Зобразити множину точок
$$\{z \in \mathbb{C} \mid |z+i| < 2,\ 0 < \operatorname{Re} z \le 1\}.$$

5. Визначити вид кривої

$$z = 3\operatorname{ch} 2t + i\,2\operatorname{sh} 2t.$$

6. Побудувати лінії та області, що задані співвідношенням

$$-\operatorname{Re} z + |z| \le 0.$$

7. Знайти всі значення функції

1) $\operatorname{sh}(i-2)$; 2) $(i+1)^i$;

3) $\operatorname{Arctg}(1+i)$; 4) $\operatorname{ch}(1-\pi i)$.

8. Перевірити, чи є функція $f(z)$ аналітичною, якщо так, знайти її похідну

$$f(z) = (x^2 - y^2 - y) + i(2xy + x).$$

9. Відновити аналітичну функцію $f(z)$, якщо

1) $\operatorname{Re} f(z) = 2^{-x}\cos(y\ln 2)$;

2) $\operatorname{Re} f(z) = e^{-y}\cos x,\ f(0) = 1$.

10. Знайти коефіцієнт розтягу та кут повороту в точці z_0, при відображенні комплексної площини, яке задається функцією

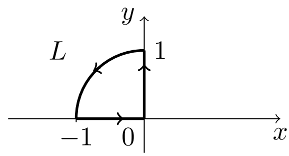
$$f(z) = \operatorname{sh} z,\ z_0 = 2 + \frac{\pi i}{2}.$$

11. Обчислити інтеграл $\int\limits_L (\bar{z} + \operatorname{Re} z)\,dz$,

1) $L: y = x,\ 0 \to 1+i$;
2) $L: y = x^2,\ 0 \to 1+i$;
3) $L:$ ламана $z_1z_2z_3$, $z_1 = 0$, $z_2 = 1+i$, $z_3 = 1$.

12. Обчислити інтеграл $\oint\limits_C (\bar{z} + \operatorname{Re} z)\,dz$ по контуру C, який складається з верхнього півкола $|z| = a$ та відрізка дійсної осі, з обходом контуру проти годинникової стрілки.

13. Обчислити $\oint\limits_L \operatorname{Im}\frac{\bar{z}}{z}\,dz$, де крива L задана графічно:



14. Обчислити $\displaystyle\oint\limits_{|z-z_c|=R} \frac{dz}{(z^2+)}$,

$$\begin{cases} R = 2,\ z_c = 2i; \\ R = 2,\ z_c = 0 \end{cases}$$

за допомогою теореми Коші, інтегральної формули Коші або формули для похідних.

15. Обчислити $\displaystyle\int\limits_2^{2+i} (z-i)\,dz$.

16. Обчислити $\displaystyle\int\limits_L \frac{\bar{z}}{z}\,dz$,

L – границя області $\{1 < |z| < 2,\ \operatorname{Re} z > 0\}$.

17. Знайти радіус збіжності ряду

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{e^{in}}{n^i} z^n.$$

Варіант 11

18. Знайти всі лоранівські розвинення функції

1) $f(z) = \dfrac{11z - 242}{2z^3 + 11z^2 - 121z},\ z_0 = 0;$

2) $f(z) = \dfrac{z+3}{z^2 - 1},\ z_0 = -2 + 3i;$

3) $f(z) = z^2 \sin \pi \dfrac{z+1}{z},\ z_0 = 0.$

19. Визначити тип особливих точок функції

1) $f(z) = z^2 e^{\frac{1}{z}};$

2) $f(z) = \dfrac{e^{5z} - 1}{\operatorname{ch} z - 1 - \frac{z^2}{2}},\ z = 0;$

3) $f(z) = \operatorname{ctg} \pi z.$

20. За допомогою лишків обчислити інтеграли

1) $\oint\limits_{|z|=4} z^n e^{\frac{1}{3z}} dz;$ 2) $\oint\limits_{|z-3|=1} \dfrac{\sin 3z + 2}{z^2(z-\pi)} dz;$

3) $\oint\limits_{|z|=2} \dfrac{z - \sin z}{2z^4}\, dz;$

4) $\oint\limits_{|z|=1} \dfrac{6z - \sin 6z}{z^2 \operatorname{sh}^2 2z}\, dz;$

5) $\int\limits_0^{2\pi} \dfrac{dt}{3 - \sqrt{5}\sin t};$

6) $\int\limits_0^{2\pi} \dfrac{dt}{(3 + \sqrt{5}\cos t)^2};$

7) $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \dfrac{dx}{(x^2+9)(x^2+1)^2};$

8) $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \dfrac{x \sin 2x - \sin x}{(x^2+4)^2}\, dx;$

9) $\oint\limits_{|z-3i|=2} \left(\dfrac{\pi i}{e^{\frac{\pi z}{2}} + i} + \right.$

$\left. + \dfrac{8 \cos \frac{\pi z}{1+3i}}{(z-1-3i)^2(z-3-3i)} \right) dz.$

21. Знайти відображення функцією $\omega = f(z)$ області D, заданої в комплексній площині z, на область D_1 в комплексній площині ω та дати графічну інтерпретацію

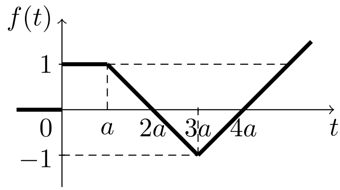
$$\omega = z^2,\ D : \begin{cases} y \le x; \\ 0 \le x \le 1; \\ 0 \le y \le 1. \end{cases}$$

22. Знайти зображення оригіналу

1) $f(t) = \dfrac{\operatorname{sh}^2 2t}{t};$

2) $f(t) = \cos(2t - 5);$

3)



23. Знайти оригінал за даним зображенням

$$F(p) = \frac{p}{(p^2+1)(p^2+4)}.$$

24. Розв'язати задачу Коші

1) $y' - y = \eta(t) + 2\eta(t - \frac{\pi}{2}),\ y(0) = 0;$

2) $y'' - y = \dfrac{1}{1 + \operatorname{ch} t},\ y(0) = y'(0) = 0;$

3) $y'' + y = \operatorname{sh} t,\ y(0) = 2,\ y'(0) = 1;$

4) $\begin{cases} x' = x + 2y, \\ y' = 2x + y + 1, \end{cases}$
$x(0) = 0,\ y(0) = 5.$

25. Розв'язати інтегральне рівняння

$$y(x) = e^x - 2\int\limits_0^x \cos(x-t) y(t)\, dt.$$

Варіант 12

1. Звести до тригонометричної форми комплексне число
$$\left(\sin\frac{\pi}{11} - i - i\cos\frac{\pi}{11}\right)^{55}.$$

2. Подати в алгебраїчній формі
$$\left(\frac{1-i}{\sqrt{3}+i}\right)^{6}.$$

3. Знайти всі значення кореня та побудувати їх
$$\sqrt[7]{3+2i}.$$

4. Зобразити множину точок
$$\left\{z \in \mathbb{C} \,|\, |z-i| \le 1,\ 0 < \arg z < \frac{\pi}{4}\right\}.$$

5. Визначити вид кривої
$$z = 2\,\mathrm{ch}\,3t - i\,3\,\mathrm{sh}\,3t.$$

6. Побудувати лінії та області, що задані співвідношенням
$$\frac{\pi}{4} \le \arg(z+1-i) \le \frac{3\pi}{4}.$$

7. Знайти всі значення функції

1) $\cos(3+4i)$; 2) $\ln(-1)$, $\mathrm{Ln}(-1)$;

3) $\mathrm{Arctg}(1-i)$; 4) $\mathrm{Ln}(1+\sqrt{3}i)$.

8. Перевірити, чи є функція $f(z)$ аналітичною, якщо так, знайти її похідну
$$f(z) = (4x\sin y + \cos x) + i(\cos x - 4\cos y).$$

9. Відновити аналітичну функцію $f(z)$, якщо

1) $\mathrm{Im}\, f(z) = x^2 - 6xy - y^2$;

2) $\mathrm{Re}\, f(z) = y - 2xy$, $f(0) = 0$.

10. Знайти коефіцієнт розтягу та кут повороту в точці z_0, при відображенні комплексної площини, яке задається функцією
$$f(z) = \mathrm{ch}\,2z,\ z_0 = 3 + \frac{\pi i}{4}.$$

11. Обчислити інтеграл $\int\limits_L (z + \mathrm{Re}\,(z+1))\,dz$,

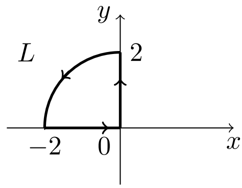
1) $L: y = x,\ 0 \to 1+i$;

2) $L: y = x^2,\ 0 \to 1+i$;

3) $L:$ ламана $z_1z_2z_3$, $z_1 = 0$, $z_2 = 1+i$, $z_3 = 1$.

12. Обчислити інтеграл $\oint\limits_C (z + \mathrm{Re}\,(z+1))\,dz$ по контуру C, який складається з верхнього півкола $|z| = a$ та відрізка дійсної осі, з обходом контуру проти годинникової стрілки.

13. Обчислити $\oint\limits_L (z - \mathrm{Re}\, z)\,dz$, де крива L задана графічно:



14. Обчислити $\oint\limits_{|z-a|=a} \frac{ze^z}{(z-a)^2}\,dz$ за допомогою теореми Коші, інтегральної формули Коші або формули для похідних.

15. Обчислити $\int\limits_0^{\frac{\pi i}{2}} \cos 2z\,dz$.

16. Обчислити $\int\limits_{z_1z_2z_3} (\mathrm{ch}\,z + \cos iz)\,dz$, $z_1z_2z_3$ – ламана, $z_1 = 0$, $z_2 = -1$, $z_3 = i$.

17. Знайти радіус збіжності ряду
$$\sum_{n=0}^{\infty} \sin(in^2) z^n.$$

Варіант 12

18. Знайти всі лоранівські розвинення функції

1) $f(z) = \dfrac{6z-144}{z^4+6z^3-72z^2},\ z_0 = 0;$

2) $f(z) = \dfrac{z+3}{z^2-1},\ z_0 = -2-2i;$

3) $f(z) = z\cos\dfrac{z}{z+2i},\ z_0 = -2i.$

19. Визначити тип особливих точок функції

1) $f(z) = \dfrac{1}{\cos z - 1 + \frac{z^2}{2}};$

2) $f(z) = \dfrac{\sin 4z - 4z}{e^z - 1 - z},\ z = 0;$

3) $f(z) = \dfrac{\sin \pi z}{(z-1)^3}.$

20. За допомогою лишків обчислити інтеграли

1) $\displaystyle\oint\limits_{|z|=4} \frac{z+1}{z^2+2z+3}\,dz;$

2) $\displaystyle\oint\limits_{|z-\frac{1}{2}|=1} \frac{e^z+1}{z(z-1)}\,dz;$

3) $\displaystyle\oint\limits_{|z|=1} \frac{z^3-2z^2+1}{2z^4}\,dz;$

4) $\displaystyle\oint\limits_{|z|=2} \frac{\cos 4z - 1 + 8z^2}{z^4\,\mathrm{sh}\,\frac{4z}{3}}\,dz;$

5) $\displaystyle\int\limits_0^{2\pi} \frac{dt}{3-2\sqrt{2}\sin t};$

6) $\displaystyle\int\limits_0^{2\pi} \frac{dt}{(3+2\sqrt{2}\sin t)^2};$

7) $\displaystyle\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{x^2+1}{(x^2+x+1)^2}\,dx;$

8) $\displaystyle\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{\cos 5x}{(x^2+1)^2(x^2+4)}\,dx;$

9) $\displaystyle\oint\limits_{|z-1|=2} \left(z e^{\frac{2}{z-1}} + \frac{2\cos\frac{\pi z}{2}}{(z-2)^2(z-4)} \right) dz.$

21. Знайти відображення функцією $\omega = f(z)$ області D, заданої в комплексній площині z, на область D_1 в комплексній площині ω та дати графічну інтерпретацію

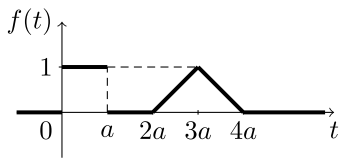
$$\omega = \ln z,\ D : y > 0.$$

22. Знайти зображення оригіналу

1) $f(t) = \dfrac{\sin t \sin 3t}{t};$

2) $f(t) = \mathrm{sh}\,(4t-16);$

3)



23. Знайти оригінал за даним зображенням

$$F(p) = \frac{p+5}{(p+1)(p^2-2p+5)}.$$

24. Розв'язати задачу Коші

1) $y'' - 2y' + y = t\eta(t) - (t-1)\eta(t-1),$
$y(0) = y'(0) = 0;$

2) $y'' + y' = \dfrac{1}{1+e^t},\ y(0) = y'(0) = 0;$

3) $y'' + 4y' + 29y = e^{-2t},$
$y(0) = 0,\ y'(0) = 1;$

4) $\begin{cases} x' = 2x - 2y; \\ y' = -4x, \end{cases}$
$x(0) = 3,\ y(0) = 1.$

25. Розв'язати інтегральне рівняння

$$\int\limits_0^x \cos(x-t)y(t)\,dt = \sin x.$$

Варіант 13

1. Звести до тригонометричної форми комплексне число
$$\left(-\sin\frac{\pi}{17}+i\cos\frac{\pi}{17}\right)^{85}.$$

2. Подати в алгебраїчній формі
$$\left(\frac{\sqrt{2}+i\sqrt{2}}{1-i}\right)^{10}.$$

3. Знайти всі значення кореня та побудувати їх
$$\sqrt[4]{2-2\sqrt{3}i}.$$

4. Зобразити множину точок
$$\{z\in\mathbb{C}\,|\,|z-i|\le 2,\quad 0<\operatorname{Im} z<2\}.$$

5. Визначити вид кривої
$$z=5\operatorname{sh}4t+i\,4\operatorname{ch}4t.$$

6. Побудувати лінії та області, що задані співвідношенням
$$1\le|z+2+i|\le 2.$$

7. Знайти всі значення функції

1) $\operatorname{ch}(-i)$; 2) $e^{2+\pi i}$;

3) $\operatorname{Arcsin}(i^2+i-1)$; 4) $\operatorname{Ln}(-1+i)$.

8. Перевірити, чи є функція $f(z)$ аналітичною, якщо так, знайти її похідну
$$f(z)=\sin x\operatorname{ch} y+i\cos x\operatorname{sh} y.$$

9. Відновити аналітичну функцію $f(z)$, якщо

1) $\operatorname{Re} f(z)=-x^2+4xy+y^2$;

2) $\operatorname{Im} f(z)=x^2-y^2+2x+1,\ f(0)=i$.

10. Знайти коефіцієнт розтягу та кут повороту в точці z_0, при відображенні комплексної площини, яке задається функцією
$$f(z)=\operatorname{sh}(2z),\ z_0=1+\frac{\pi i}{2}.$$

11. Обчислити інтеграл $\int\limits_L \operatorname{Re}(z^2+\bar z^2)\,dz$,

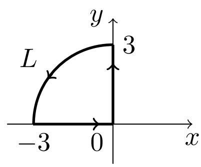
1) $L: y=x,\ 0\to 1+i$;

2) $L: y=x^2,\ 0\to 1+i$;

3) $L:$ ламана $z_1z_2z_3,\ z_1=0,\ z_2=1+i,\ z_3=1$.

12. Обчислити інтеграл $\oint\limits_C \operatorname{Re}(z^2+\bar z^2)\,dz$ по контуру C, який складається з верхнього півкола $|z|=a$ та відрізка дійсної осі, з обходом контуру проти годинникової стрілки.

13. Обчислити $\oint\limits_L |z|z\,dz$, де крива L задана графічно:



14. Обчислити $\oint\limits_{|z+i|=3}\frac{\sin z}{(z+1)^3}\,dz$, за допомогою теореми Коші, інтегральної формули Коші або формули для похідних.

15. Обчислити $\int\limits_0^{3(1+i)}(z^2-z)\,dz$.

16. Обчислити $\int\limits_L |z|\bar z\,dz$,

$L:\{|z|=4,\ \operatorname{Re} z\ge 0\}$.

17. Знайти радіус збіжності ряду
$$\sum_{n=0}^{\infty}\sin(in)z^n.$$

Варіант 13

18. Знайти всі лоранівські розвинення функції

1) $f(z) = \dfrac{13z - 338}{2z^3 + 12z^2 - 169z},\ z_0 = 0;$

2) $f(z) = \dfrac{z}{z^2 + 1},\ z_0 = 2 + i;$

3) $f(z) = \cos \dfrac{z^2 - 4z}{(z-2)^2},\ z_0 = 2.$

19. Визначити тип особливих точок функції

1) $f(z) = \dfrac{1}{e^{-z} + z - 1};$

2) $f(z) = z^4 \sin \dfrac{5}{z^2},\ z = 0;$

3) $f(z) = \dfrac{1}{\sin z^2}.$

20. За допомогою лишків обчислити інтеграли

1) $\displaystyle\oint\limits_{|z|=4} \frac{dz}{(z-1)^2(z^2+1)};$

2) $\displaystyle\oint\limits_{|z|=1} \frac{e^{zi} + 2}{\sin 3zi}\, dz;$

3) $\displaystyle\oint\limits_{|z|=\frac{1}{3}} \frac{4z^5 - 3z^3 + 1}{z^6}\, dz;$

4) $\displaystyle\oint\limits_{|z|=6} \frac{\operatorname{sh} \pi z - \pi z}{z^2 \sin^2 \frac{\pi z}{6}}\, dz;$

5) $\displaystyle\int\limits_0^{2\pi} \frac{dt}{4 - 2\sqrt{3}\sin t};$

6) $\displaystyle\int\limits_0^{2\pi} \frac{dt}{(2\sqrt{2} + \sqrt{7}\cos t)^2};$

7) $\displaystyle\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{x^2 + 1}{(x^2 + 4x + 13)^2}\, dx;$

8) $\displaystyle\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{x^3 \sin x}{x^4 + 5x^2 + 4}\, dx;$

9) $\displaystyle\oint\limits_{|z+i|=2} \left(\frac{2\sin \frac{\pi z}{2-2i}}{(z-1+i)^2(z-3+i)} - \frac{3\pi i}{e^{\frac{\pi z}{2}} + i} \right) dz.$

21. Знайти відображення функцією $\omega = f(z)$ області D, заданої в комплексній площині z, на область D_1 в комплексній площині ω та дати графічну інтерпретацію

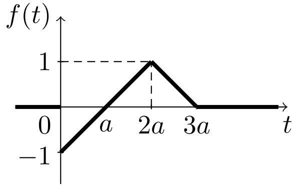
$$\omega = 4 + 2iz;\ D : |z - i| < 1.$$

22. Знайти зображення оригіналу

1) $f(t) = \dfrac{\operatorname{sh} 3t}{t};$

2) $f(t) = -\cos(2 + 12t);$

3)



23. Знайти оригінал за даним зображенням

$$F(p) = \frac{1}{p^3 + p^2 + p}.$$

24. Розв'язати задачу Коші

1) $y' + 2y = 2\eta(t) - \eta(t-1) - \eta(t-2),$
$y(0) = 0;$

2) $y'' - 4y' + 4y = \dfrac{2e^{2t}}{\operatorname{ch}^2 2t},$
$y(0) = y'(0) = 0;$

3) $y'' - 3y' + 2y = e^t,\ y(0) = 1,\ y'(0) = 0;$

4) $\begin{cases} x' = -x - 2y + 1; \\ y' = -\frac{3}{2}x + y, \end{cases}$
$x(0) = 1,\ y(0) = 0.$

25. Розв'язати інтегральне рівняння

$$y(x) = \operatorname{sh} x - \int\limits_0^x \operatorname{ch}(x - t) y(t)\, dt.$$

Варіант 14

1. Звести до тригонометричної форми комплексне число

$$\left(\sin\frac{\pi}{5} - i + i\cos\frac{\pi}{5}\right)^{65}.$$

2. Подати в алгебраїчній формі

$$\left(\frac{\sqrt{3}-i}{1+i\sqrt{3}}\right)^{10}.$$

3. Знайти всі значення кореня та побудувати їх

$$\sqrt[2]{2i}.$$

4. Зобразити множину точок
$$\left\{z \in \mathbb{C} \,\middle|\, |z+i| > 1,\ -\frac{\pi}{4} \le \arg z < 0\right\}.$$

5. Визначити вид кривої

$$z = -4\,\mathrm{sh}\,5t - i\,5\,\mathrm{ch}\,5t.$$

6. Побудувати лінії та області, що задані співвідношенням

$$\frac{\pi}{3} < \arg(z-i) \le \frac{\pi}{2}.$$

7. Знайти всі значення функції

1) $\cos(2i+1)$;

2) $\ln(i^2-1),\ \mathrm{Ln}\,(i^2-1)$;

3) $\mathrm{Arccos}\,(5i)$; 4) $\cos\left(\frac{\pi}{4} - 2i\right)$.

8. Перевірити, чи є функція $f(z)$ аналітичною, якщо так, знайти її похідну

$$f(z) = \sin(x - iy).$$

9. Відновити аналітичну функцію $f(z)$, якщо

1) $\mathrm{Im}\, f(z) = 2x^3 - 6xy^2$;

2) $\mathrm{Re}\, f(z) = x^2 - y^2 - 2x + 1,\ f(0) = 1$.

10. Знайти коефіцієнт розтягу та кут повороту в точці z_0, при відображенні комплексної площини, яке задається функцією

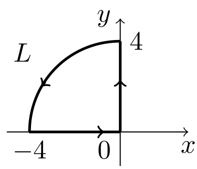
$$f(z) = e^{5z},\ z_0 = \frac{\pi i}{10}.$$

11. Обчислити інтеграл $\int\limits_L \bar{z}^2 \mathrm{Re}\, z\, dz$,

1) $L: y = x,\ 0 \to 1+i$;
2) $L: y = x^2,\ 0 \to 1+i$;
3) $L:$ ламана $z_1z_2z_3,\ z_1 = 0,\ z_2 = 1+i,\ z_3 = 1$.

12. Обчислити інтеграл $\oint\limits_C \bar{z}^2 \mathrm{Re}\, z\, dz$ по контуру C, який складається з верхнього півкола $|z| = a$ та відрізка дійсної осі, з обходом контуру проти годинникової стрілки.

13. Обчислити $\oint\limits_L |z| \mathrm{Im}\, z^2\, dz$, де крива L задана графічно:



14. Обчислити $\oint\limits_{|z-z_c|=R} \frac{dz}{z^2+1}$,

$$\left\{\begin{array}{l} R = 2,\ z_c = 0; \\ R = 2,\ z_c = -2i \end{array}\right.$$

за допомогою теореми Коші, інтегральної формули Коші або формули для похідних.

15. Обчислити $\int\limits_1^i \frac{1}{z}\, dz$.

16. Обчислити $\int\limits_L (\mathrm{ch}\, z + z)\, dz$,

$L: \{|z| = 1,\ \mathrm{Im}\, z \le 0\}$.

17. Знайти радіус збіжності ряду

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{e^{in}}{n^2} z^n.$$

Варіант 14

18. Знайти всі лоранівські розвинення функції

1) $f(z) = \dfrac{7z-196}{z^4+7z^3-98z^2},\ z_0 = 0;$

2) $f(z) = \dfrac{z}{z^2+1},\ z_0 = 1-2i;$

3) $f(z) = \sin\dfrac{z+i}{z-i},\ z_0 = i.$

19. Визначити тип особливих точок функції

1) $f(z) = \dfrac{2z+3}{(z+1)^3(z^2-3z+2)^2};$

2) $f(z) = \dfrac{\cos 3z - 1}{\sin z - z + \frac{z^3}{6}},\ z = 0;$

3) $f(z) = \dfrac{\sin 3z - 3\sin z}{z(\sin z - z)}.$

20. За допомогою лишків обчислити інтеграли

1) $\displaystyle\oint\limits_{|z|=\frac{3}{2}} \frac{e^z}{z(1-z)^3}\,dz;$

2) $\displaystyle\oint\limits_{|z-2|=3} \frac{\cos^2 z + 1}{z^2-\pi^2}\,dz;$

3) $\displaystyle\oint\limits_{|z|=1} \frac{e^{2z}-z}{z^2}\,dz;$

4) $\displaystyle\oint\limits_{|z|=1} \frac{\operatorname{ch} 4z - 8z^2 - 1}{z^4 \sin\frac{8z}{3}}\,dz;$

5) $\displaystyle\int\limits_0^{2\pi} \frac{dt}{5-\sqrt{21}\sin t};$

6) $\displaystyle\int\limits_0^{2\pi} \frac{dt}{(\sqrt{6}+\cos t)^2};$

7) $\displaystyle\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{x^2}{(x^2+5)^2}\,dx;$

8) $\displaystyle\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{(x+1)\sin 2x}{x^2+2x+2}\,dx;$

9) $\displaystyle\oint\limits_{|z-2|=2} \left(z \operatorname{ch}\frac{3}{z-2} + \frac{2\cos\frac{\pi z}{3}}{(z-3)^2(z-5)} \right) dz.$

21. Знайти відображення функцією $\omega = f(z)$ області D, заданої в комплексній площині z, на область D_1 в комплексній площині ω та дати графічну інтерпретацію

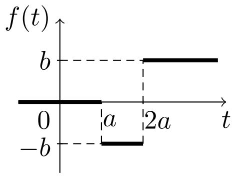
$$\omega = \frac{2}{z-1};\ D: 1 < |z| < 2.$$

22. Знайти зображення оригіналу

1) $f(t) = \dfrac{\cos 2t - \cos 4t}{t};$

2) $f(t) = \frac{7}{9}\operatorname{ch}(8t+3);$

3)



23. Знайти оригінал за даним зображенням

$$F(p) = \frac{3p+2}{(p+1)(p^2+4p+5)}.$$

24. Розв'язати задачу Коші

1) $y' + y = 2\eta(t-2) - \eta(t-1),\ y(0) = 0;$

2) $y'' - 4y = \dfrac{1}{\operatorname{ch}^3 2t},\ y(0) = y'(0) = 0;$

3) $2y'' + 3y' + y = 3e^t,$
$y(0) = 0,\ y'(0) = 1;$

4) $\begin{cases} x' = 3x + 5y + 2, \\ y' = 3x + y + 1, \end{cases}$
$x(0) = 0,\ y(0) = 2.$

25. Розв'язати інтегральне рівняння

$$\operatorname{sh} x = \int\limits_0^x \operatorname{ch}(x-t)y(t)\,dt.$$

Варіант 15

1. Звести до тригонометричної форми комплексне число

$$\left(\sin\frac{\pi}{7} + i\cos\frac{\pi}{7}\right)^{56}.$$

2. Подати в алгебраїчній формі

$$\left(\frac{\sqrt{3}-i}{\sqrt{2}+i\sqrt{2}}\right)^{10}.$$

3. Знайти всі значення кореня та побудувати їх

$$\sqrt[5]{4-4\sqrt{3}i}.$$

4. Зобразити множину точок

$$\left\{z\in\mathbb{C}\,|\,|z-1-i|<1,\quad |\arg z|\le\frac{\pi}{4}\right\}.$$

5. Визначити вид кривої

$$z = \frac{2}{\operatorname{ch}2t} + i\,4\operatorname{th}2t.$$

6. Побудувати лінії та області, що задані співвідношенням

$$|z-i|+|z+i|=4.$$

7. Знайти всі значення функції

1) $\sin^2 i$; 2) $\ln(1+i)^2$;

3) $\operatorname{Arccos}(2+2i)$; 4) $\sin\left(\frac{\pi}{2}-5i\right)$.

8. Перевірити, чи є функція $f(z)$ аналітичною, якщо так, знайти її похідну

$$f(z) = -2\cos x\operatorname{ch}y - i\,2\operatorname{sh}y\sin x.$$

9. Відновити аналітичну функцію $f(z)$, якщо

1) $\operatorname{Re} f(z) = x^3+x^2y-3xy^2-y^3$;

2) $\operatorname{Im} f(z) = 3x^2y-y^3-y,\ f(0)=0$.

10. Знайти коефіцієнт розтягу та кут повороту в точці z_0, при відображенні комплексної площини, яке задається функцією

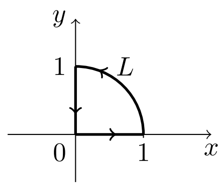
$$f(z)=e^{-2z},\ z_0=1+\frac{\pi i}{2}.$$

11. Обчислити інтеграл $\int\limits_L(\bar z+1-i)\,dz$,

1) $L: y=x,\ 0\to 1+i$;
2) $L: y=x^2,\ 0\to 1+i$;
3) $L:$ ламана $z_1z_2z_3,\ z_1=0,\ z_2=1+i,\ z_3=1$.

12. Обчислити інтеграл $\oint\limits_C(\bar z+1-i)\,dz$ по контуру C, який складається з верхнього півкола $|z|=a$ та відрізка дійсної осі, з обходом контуру проти годинникової стрілки.

13. Обчислити $\oint\limits_L \bar z^2\,dz$, де крива L задана графічно:



14. Обчислити $\oint\limits_{|z|=2}\frac{e^z}{z^2-1}\,dz$, за допомогою теореми Коші, інтегральної формули Коші або формули для похідних.

15. Обчислити $\int\limits_0^{\pi i}\operatorname{sh}z\,dz$.

16. Обчислити $\int\limits_L |z|\operatorname{Re}z^2\,dz$,

$L:\{|z|=R,\ \operatorname{Im}z\ge 0\}$.

17. Знайти радіус збіжності ряду

$$\sum_{n=0}^{\infty}(n+1)e^{in}z^n.$$

Варіант 15

18. Знайти всі лоранівські розвинення функції

1) $f(z) = \dfrac{15z - 450}{2z^3 + 15z^2 - 225z}$, $z_0 = 0$;

2) $f(z) = \dfrac{z}{z^2 + 1}$, $z_0 = -3 + i$;

3) $f(z) = \sin \dfrac{z}{z - 3}$, $z_0 = 3$.

19. Визначити тип особливих точок функції

1) $f(z) = \dfrac{\sin z - 3\cos^2 z}{z(z^2 + 9)^2}$;

2) $f(z) = \dfrac{\operatorname{sh} 2z - 2z}{\cos z - 1 + \frac{z^2}{2}}$, $z = 0$;

3) $f(z) = \dfrac{1}{e^z - 1} - \dfrac{1}{z}$.

20. За допомогою лишків обчислити інтеграли

1) $\displaystyle\oint\limits_{|z|=2} \frac{dz}{z^5 + z^3}$; 2) $\displaystyle\oint\limits_{|z-1|=\frac{3}{2}} \frac{\ln(z+2)}{\sin z} dz$;

3) $\displaystyle\oint\limits_{|z|=1} \frac{\cos iz - 1}{z^3}\, dz$;

4) $\displaystyle\oint\limits_{|z|=0{,}9} \frac{e^{3z} - 1 - 3z}{\operatorname{sh}^2 \pi z}\, dz$;

5) $\displaystyle\int\limits_0^{2\pi} \frac{dt}{6 - 4\sqrt{2}\sin t}$;

6) $\displaystyle\int\limits_0^{2\pi} \frac{dt}{(\sqrt{6} + \sqrt{5}\cos t)^2}$;

7) $\displaystyle\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{(x^2+1)^2(x^2+4)}$;

8) $\displaystyle\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{x\sin x}{(x^2+1)^2}\, dx$;

9) $\displaystyle\oint\limits_{|z+7i|=2} \left(\frac{\pi i}{e^{\frac{\pi z}{2}} - i} - \frac{8\operatorname{ch}\frac{\pi i z}{1-7i}}{(z-1+7i)^2(z-3+7i)} \right) dz.$

21. Знайти відображення функцією $\omega = f(z)$ області D, заданої в комплексній площині z, на область D_1 в комплексній площині ω та дати графічну інтерпретацію

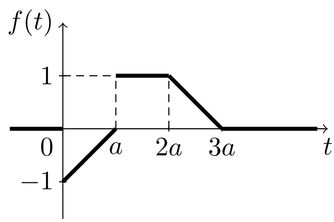
$$\omega = e^z;\ D : -\pi < y < 0.$$

22. Знайти зображення оригіналу

1) $f(t) = \dfrac{1 - \cos t}{t}\, e^t$;

2) $f(t) = \operatorname{sh}(4t - 16)$;

3)



23. Знайти оригінал за даним зображенням

$$F(p) = \frac{1}{p(p^3 + 1)}.$$

24. Розв'язати задачу Коші

1) $y'' - 3y' + 2y = \eta(t-2) - \eta(t-3)$, $y(0) = y'(0) = 0$;

2) $y'' - y = \dfrac{1}{\operatorname{ch}^2 t}$, $y(0) = y'(0) = 0$;

3) $y'' - 2y' - 3y = 2t$, $y(0) = y'(0) = 1$;

4) $\begin{cases} x' = 3x + 2y; \\ y' = \frac{5}{2}x - y + 2, \end{cases}$ $x(0) = 0,\ y(0) = 1.$

25. Розв'язати інтегральне рівняння

$$y(x) = e^x + \int\limits_0^x e^{x-t} y(t)\, dt.$$

Варіант 16

1. Звести до тригонометричної форми комплексне число

$$\left(1+\sin\frac{\pi}{8}+i\cos\frac{\pi}{8}\right)^{52}.$$

2. Подати в алгебраїчній формі

$$\left(\frac{\sqrt{3}-i}{i+1}\right)^{16}.$$

3. Знайти всі значення кореня та побудувати їх

$$\sqrt[3]{5}.$$

4. Зобразити множину точок

$$\left\{z\in\mathbb{C}\mid |z|<2,\ -\frac{\pi}{4}\le\arg(z-1)\le\frac{\pi}{4}\right\}.$$

5. Визначити вид кривої

$$z=\frac{4}{\operatorname{ch}4t}+i\,2\operatorname{th}4t.$$

6. Побудувати лінії та області, що задані співвідношенням

$$\operatorname{Im}\left(\frac{1}{z}\right)<-\frac{1}{2}.$$

7. Знайти всі значення функції

1) $\cos(1-i)$; 2) $\operatorname{Ln}(3i+4)^2$;

3) $\operatorname{Arctg}(1-2i)$; 4) $\operatorname{sh}\left(3+\frac{\pi i}{6}\right)$.

8. Перевірити, чи є функція $f(z)$ аналітичною, якщо так, знайти її похідну

$$f(z)=\cos(x-iy).$$

9. Відновити аналітичну функцію $f(z)$, якщо

1) $\operatorname{Im}f(z)=x^3-3xy^2+2y$;

2) $\operatorname{Im}f(z)=2xy+y,\ f(0)=0$.

10. Знайти коефіцієнт розтягу та кут повороту в точці z_0, при відображенні комплексної площини, яке задається функцією

$$f(z)=z^3+2z,\ z_0=1+2i.$$

11. Обчислити інтеграл $\int\limits_L z\operatorname{Im}z\,dz$,

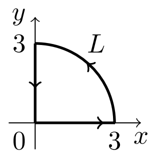
1) $L: y=x,\ 0\to 1+i$;

2) $L: y=x^2,\ 0\to 1+i$;

3) $L:$ ламана $z_1z_2z_3,\ z_1=0,\ z_2=1+i,\ z_3=i$.

12. Обчислити інтеграл $\oint\limits_C z\operatorname{Im}z\,dz$ по контуру C, який складається з верхнього півкола $|z|=a$ та відрізка дійсної осі, з обходом контуру проти годинникової стрілки.

13. Обчислити $\oint\limits_L (z^2+z)\,dz$, де крива L задана графічно:



14. Обчислити $\displaystyle\oint\limits_{|z|=4}\frac{\sin z}{z^2-\pi^2}\,dz$

за допомогою теореми Коші, інтегральної формули Коші або формули для похідних.

15. Обчислити $\displaystyle\int\limits_{1+i}^{-1+i}(2z+1)\,dz$.

16. Обчислити $\int\limits_L (3z^2+2z)\,dz$,

$L: \{y=x^2,\ 0\to 1+i\}$.

17. Знайти радіус збіжності ряду

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{e^{in}z^n}{3^n}.$$

18. Знайти всі лоранівські розвинення функції

1) $f(z)=\dfrac{8z-256}{z^4+8z^3-128z^2},\ z_0=0$;

Варіант 16

2) $f(z) = \dfrac{z}{z^2+1},\ z_0 = -3-2i;$

3) $f(z) = ze^{\frac{1}{z-2}},\ z_0 = 2.$

19. Визначити тип особливих точок функції

1) $f(z) = \dfrac{1}{z}e^{\frac{z+1}{z}};$

2) $f(z) = \dfrac{\operatorname{ch} 2z - 1}{\operatorname{sh} z - z - \frac{z^3}{6}},\ z = 0;$

3) $f(z) = \dfrac{e^z - 1}{\sin \pi z}.$

20. За допомогою лишків обчислити інтеграли

1) $\displaystyle\oint\limits_{|z+1|=1} \frac{dz}{1+z^4};$

2) $\displaystyle\oint\limits_{|z-6|=1} \frac{\sin^3 z + 2}{z^2 - 4\pi^2}\, dz;$

3) $\displaystyle\oint\limits_{|z|=1} \frac{\cos iz - 1}{z^3}\, dz;$

4) $\displaystyle\oint\limits_{|z|=0{,}5} \frac{e^{6z} - \cos 8z}{z \operatorname{sh} 4z}\, dz;$

5) $\displaystyle\int\limits_0^{2\pi} \frac{dt}{8 - 2\sqrt{15}\sin t};$

6) $\displaystyle\int\limits_0^{2\pi} \frac{dt}{(\sqrt{7} + \sqrt{5}\cos t)^2};$

7) $\displaystyle\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{x^2+5}{x^4+5x^2+6}\, dx;$

8) $\displaystyle\int\limits_0^{+\infty} \frac{\cos 2x}{(x^2+\frac{1}{4})^2}\, dx;$

9) $\displaystyle\oint\limits_{|z-3|=2} \left(z \operatorname{sh} \frac{1}{z-3} - \right.$

$\displaystyle\left. - \frac{4\sin\frac{\pi z}{8}}{(z-2)^2(z-6)} \right) dz.$

21. Знайти відображення функцією $\omega = f(z)$ області D, заданої в комплексній площині z, на область D_1 в комплексній площині ω та дати графічну інтерпретацію

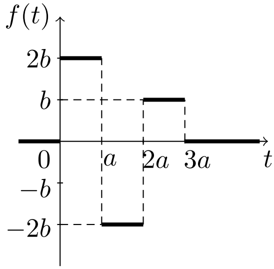
$$\omega = z^2;\ D: \begin{cases} |z| < 2; \\ 0 < \arg z < \frac{\pi}{2}. \end{cases}$$

22. Знайти зображення оригіналу

1) $f(t) = \dfrac{e^t \sin^2 2t}{t};$

2) $f(t) = \operatorname{ch}(6t+3);$

3)



23. Знайти оригінал за даним зображенням

$$F(p) = \frac{1}{p^3(p^2-4)}.$$

24. Розв'язати задачу Коші

1) $y'' + 4y' + 4y = 2(\eta(t) - \eta(t-1)),$
$y(0) = 1,\ y'(0) = 0;$

2) $y'' + y' = \dfrac{e^t}{1+e^t},\ y(0) = y'(0) = 0;$

3) $y'' + 4y = \sin 2t,\ y(0) = 0,\ y'(0) = 1;$

4) $\begin{cases} x' = 2y + 1; \\ y' = 2x + 3, \end{cases}$
$x(0) = -1,\ y(0) = 0.$

25. Розв'язати інтегральне рівняння

$$y(x) = \sin x + 2\int\limits_0^x e^{x-t} y(t)\, dt.$$

Варіант 17

1. Звести до тригонометричної форми комплексне число

$$\left(-\sin\frac{\pi}{10} + i\cos\frac{\pi}{10}\right)^{65}.$$

2. Подати в алгебраїчній формі

$$\left(\frac{-\sqrt{3}+i}{1-i}\right)^{15}.$$

3. Знайти всі значення кореня та побудувати їх

$$\sqrt[3]{-9}.$$

4. Зобразити множину точок

$$\left\{z \in \mathbb{C} \,|\, |z| \leq 1,\ \arg(z+i) > \frac{\pi}{4}\right\}.$$

5. Визначити вид кривої

$$z = \operatorname{th} 5t + \frac{5i}{\operatorname{ch} 5t}.$$

6. Побудувати лінії та області, що задані співвідношеннями

$$\operatorname{Im}\frac{z-1+i}{z-3i} = 0.$$

7. Знайти всі значення функцій

1) $\sin(3i+4)$; 2) $2^{(i+1)^{10}}$;

3) $\operatorname{Arctg}\left(i^4 - i\right)$; 4) $\operatorname{ch}\left(1+\frac{\pi i}{3}\right)$.

8. Перевірити, чи є функція $f(z)$ аналітичною, якщо так — знайти її похідну

$$f(z) = \cos(3x+y)\operatorname{ch}(3y-x) + i\sin(3x+y)\operatorname{sh}(3y-x).$$

9. Відновити аналітичну функцію $f(z)$, якщо

1) $\operatorname{Re} f(z) = 6x^2y - 2y^3$;

2) $\operatorname{Im} f(z) = 3x^2y - y^3,\ f(0) = 1$.

10. Знайти коефіцієнт розтягу та кут повороту в точці z_0, при відображенні комплексної площини, яке задається функцією

$$f(z) = \frac{z+1}{z},\ z_0 = 1+i.$$

11. Обчислити інтеграл $\int\limits_L \bar{z}\operatorname{Im} z\,dz$,

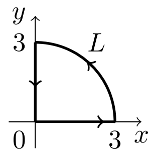
1) $L:\ y = x,\ 0 \to 1+i$;

2) $L:\ y = x^2,\ 0 \to 1+i$;

3) $L:$ ламана $z_1z_2z_3,\ z_1 = 0,\ z_2 = 1+i,\ z_3 = i$.

12. Обчислити інтеграл $\oint\limits_C \bar{z}\operatorname{Im} z\,dz$ по контуру C, який складається з верхнього півкола $|z| = a$ та відрізка дійсної осі, з обходом контура проти годинникової стрілки.

13. Обчислити $\oint\limits_L \frac{z}{\bar{z}}dz$, де крива L задана графічно:



14. Обчислити $\oint\limits_{|z+1|=1} \frac{dz}{(1+z)(z-1)^2}$ за допомогою теореми Коші, інтегральної формули Коші або формули для похідних.

15. Обчислити $\int\limits_0^{-1+\frac{3}{2}\pi i} e^{-2z}dz$.

16. Обчислити $\int\limits_L z\operatorname{Re} z^2 dz$,

$L:\ \{|z| = R,\ \operatorname{Im} z \geq 0\}$.

17. Знайти радіус збіжності ряду

$$\sum_{n=0}^{\infty} \cos\left(in^2\right) z^n.$$

Варіант 17

18. Знайти всі лоранівські розвинення функції

1) $f(z) = \dfrac{z+2}{z+z^2-2z^3},\ z_0 = 0;$

2) $f(z) = \dfrac{z+2}{(z-1)(z+3)},\ z_0 = -2+2i;$

3) $f(z) = e^{\frac{z}{z-3}},\ z_0 = 3.$

19. Визначити тип особливих точок функції

1) $f(z) = \dfrac{1+\cos\pi z}{(3z^2+z-2)^2};$

2) $f(z) = \dfrac{e^{z^3}}{\operatorname{ch} z - 1 - \frac{z^2}{2}},\ z_0 = 0;$

3) $f(z) = \operatorname{th} z.$

20. За допомогою лишків обчислити інтеграли

1) $\displaystyle\oint\limits_L \frac{dz}{1+z^4},\ L:\ x^2+y^2 = 2x;$

2) $\displaystyle\oint\limits_{|z+1|=\frac{1}{2}} \frac{\operatorname{tg} z+2}{4z^2+\pi z}dz;$

3) $\displaystyle\oint\limits_{|z|=1} \frac{e^{2z}-\operatorname{ch} 5z}{z\sin 2iz}dz;$

4) $\displaystyle\oint\limits_{|z|=\frac{1}{3}} \frac{1-2z^4+3z^5}{z^4}dz;$

5) $\displaystyle\int\limits_0^{2\pi} \frac{dt}{\sqrt{3}\sin t-2};$ 6) $\displaystyle\int\limits_0^{2\pi} \frac{dt}{\left(\sqrt{2}+\cos t\right)^2};$

7) $\displaystyle\int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{(1+x^2)^3};$ 8) $\displaystyle\int\limits_0^{\infty} \frac{\cos x dx}{(x^2+1)^3};$

9) $\displaystyle\oint\limits_{|z+3|=2} \left(\frac{4\operatorname{sh}\frac{\pi i z}{2-6i}}{(z-1-3i)^2(z-3+3i)} - \frac{\pi}{e^{\frac{\pi z}{2}}-i}\right)dz.$

21. Знайти відображення функцією $\omega = f(z)$ області D, заданої в комплексній площині z, на область D_1 в комплексній площині ω та дати графічну інтерпретацію

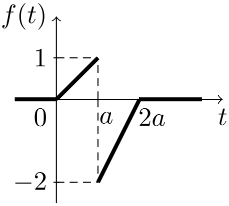
$$\omega = \frac{1}{z},\ D:\ \begin{cases} |z-i| > 1 \\ \operatorname{Im} z > 0 \end{cases}.$$

22. Знайти зображення оригіналу

1) $f(t) = t\sin 2t;$

2) $f(t) = \dfrac{\operatorname{ch} t}{t}e^{-2t};$

3)



23. Знайти оригінал за даним зображенням

$$F(p) = \frac{p}{(p^2+1)(p^2-2)}.$$

24. Розв'язати задачу Коші

1) $y'' - 7y' + 10y = \eta(t-1) - \eta(t-2),$
$y(0) = y'(0) = 0;$

2) $y'' + 2y' + y = \dfrac{e^{-t}}{(t+1)^2},$
$y(0) = y'(0) = 0;$

3) $2y'' + 5y' = 29\cos t,$
$y(0) = -1, y'(0) = 0;$

4) $\begin{cases} x' = 2x + 8y + 1; \\ y' = 3x + 4y, \end{cases}$
$x(0) = 1,\ y(0) = 0.$

25. Розв'язати інтегральне рівняння

$$y(x) = 1 + \frac{1}{6}\int\limits_0^x (x-t)^3 y(t)\,dt.$$

Варіант 18

1. Звести до тригонометричної форми комплексне число

$$\left(1-\sin\frac{\pi}{11}+i\sin\frac{\pi}{11}\right)^{77}.$$

2. Подати в алгебраїчній формі

$$\left(1+\cos\frac{\pi}{3}+i\sin\frac{\pi}{3}\right)^{8}.$$

3. Знайти всі значення кореня та побудувати їх

$$\sqrt[4]{-1+i\sqrt{3}}.$$

4. Зобразити множину точок

$$\{z\in\mathbb{C}|\, 1\le|z-i|<2,\ \operatorname{Re}z\le 0,\ \operatorname{Im}z>1\}.$$

5. Визначити вид кривої

$$z=\frac{1}{\operatorname{sh}t}-i\operatorname{cth}t.$$

6. Побудувати лінії та області, що задані співвідношеннями

$$|z-1|^2+|z+1|^2=5.$$

7. Знайти всі значення функцій

1) $\operatorname{sh}(2+i)$; 2) $(1-i)^i$;

3) $\operatorname{Arcsin}(5i-3)$; 4) $\operatorname{Ln}(-1-i)$.

8. Перевірити, чи є функція $f(z)$ аналітичною, якщо так — знайти її похідну

$$f(z)=\operatorname{ch}x\operatorname{ch}y-i\operatorname{sh}x\operatorname{sh}y.$$

9. Відновити аналітичну функцію $f(z)$, якщо

1) $\operatorname{Im}f(z)=y^3-3x^2y+6xy^2-2x^3$;

2) $\operatorname{Re}f(z)=e^y(x\cos y-y\sin y)$, $f(0)=0$.

10. Знайти коефіцієнт розтягу та кут повороту в точці z_0, при відображенні комплексної площини, яке задається функцією

$$f(z)=\frac{z-1}{z},\ z_0=1-i.$$

11. Обчислити інтеграл $\int\limits_L \operatorname{Im}\left(z^2+1\right)dz$,

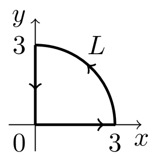
1) $L:\ y=x,\ 0\to 1+i$;

2) $L:\ y=x^2,\ 0\to 1+i$;

3) $L:$ ламана $z_1z_2z_3,\ z_1=0,\ z_2=1+i,\ z_3=i$.

12. Обчислити інтеграл $\oint\limits_C \operatorname{Im}\left(z^2+1\right)dz$ по контуру C, який складається з верхнього півкола $|z|=a$ та відрізка дійсної осі, з обходом контура проти годинникової стрілки.

13. Обчислити $\oint\limits_L \left(\operatorname{Im}z^2+i\right)dz$, де крива L задана графічно:



14. Обчислити $\oint\limits_{|z-i|=1}\frac{\cos z}{(z-i)^3}dz$ за допомогою теореми Коші, інтегральної формули Коші або формули для похідних.

15. Обчислити $\int\limits_0^1 \sin iz\,dz$.

16. Обчислити $\int\limits_{ABC}\left(z^2+1\right)dz$, $ABC:$ ламана $z_A=0,\ z_B=-1+i,\ z_C=i$.

17. Знайти радіус збіжності ряду

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{z}{in}\right)^n.$$

Варіант 18

18. Знайти всі лоранівські розвинення функцій

1) $f(z) = \dfrac{z+4}{2z^2+z^3-z^4}, \ z_0 = 0;$

2) $f(z) = \dfrac{z}{z^2+1}, \ z_0 = -3-2i;$

3) $f(z) = \sin\dfrac{2z}{z-4}, \ z_0 = 4.$

19. Визначити тип особливих точок функцій

1) $f(z) = \dfrac{1}{z+z^2-2\operatorname{ch} z};$

2) $f(z) = ze^{\frac{4}{z^3}}, \ z_0 = 0;$

3) $f(z) = \dfrac{\sin z}{z^3(1-\cos z)}.$

20. За допомогою лишків обчислити інтеграли

1) $\displaystyle\oint\limits_{|z|=\sqrt{2}} \frac{\sin \pi z}{z^2-z}dz;$

2) $\displaystyle\oint\limits_{|z+\frac{3}{2}|=1} \frac{\cos^3 z+3}{2z^2+\pi z}dz;$

3) $\displaystyle\oint\limits_{|z|=3} \frac{z^3+\cos z}{z^3}dz;$

4) $\displaystyle\oint\limits_{|z|=0,3} \frac{\operatorname{ch} 3z-\cos 4iz}{z^2\sin 5z}dz;$

5) $\displaystyle\int\limits_0^{2\pi} \frac{dt}{\sqrt{15}\sin t-4};$ 6) $\displaystyle\int\limits_0^{2\pi} \frac{dt}{(\sqrt{5}+2\cos t)^2};$

7) $\displaystyle\int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{x^2+3}{(x^2+10x+29)^2}dx;$

8) $\displaystyle\int\limits_0^{\infty} \frac{\cos x\,dx}{(x^2+16)(x^2+9)};$

9) $\displaystyle\oint\limits_{|z-4|=2} \left(z\cos\frac{1}{z-4} + \frac{10\operatorname{ch}\frac{\pi i z}{5}}{(z-5)^2(z-7)}\right)dz.$

21. Знайти відображення функцією $\omega = f(z)$ області D, заданої в комплексній площині z, на область D_1 в комплексній площині ω та дати графічну інтерпретацію

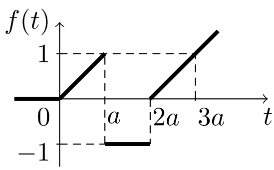
$$\omega = \frac{1-z}{1+z}, D: \begin{cases} |z|<1 \\ \operatorname{Im} z > 0 \end{cases}.$$

22. Знайти зображення оригіналу

1) $f(t) = t\sin 2t;$

2) $f(t) = \dfrac{\cos 2t - \cos 3t}{t};$

3)



23. Знайти оригінал за даним зображенням

$$F(p) = \frac{1}{p^3-1}.$$

24. Розв'язати задачу Коші

1) $4y' + 2y = \eta(t) - \eta(t-1), \ y(0) = 2;$

2) $2y'' - y' = \dfrac{e^t}{(1+e^{\frac{t}{2}})^2},$
$y(0) = y'(0) = 0;$

3) $y'' + y' + y = t^2 + t,$
$y(0) = 1, \ y'(0) = -3;$

4) $\begin{cases} x' = 2x + 2y + 2; \\ y' = 4y + 1, \end{cases}$
$x(0) = 0, \ y(0) = 1.$

25. Розв'язати інтегральне рівняння

$$y(x) = x + \int\limits_0^x \sin(x-t)\,y(t)\,dt.$$

Варіант 19

1. Звести до тригонометричної форми комплексне число

$$\left(\sin\frac{\pi}{8} - i\cos\frac{\pi}{8}\right)^{32}.$$

2. Подати в алгебраїчній формі

$$\left(1 - \cos\frac{\pi}{3} - i\sin\frac{\pi}{3}\right)^{40}.$$

3. Знайти всі значення кореня та побудувати їх

$$\sqrt[4]{2\sqrt{3} + 2i}.$$

4. Зобразити множину точок

$\{z \in \mathbb{C} |\, 1 \le |z - i| < 2,\ \operatorname{Re} z \le 0,$
$\operatorname{Im} z > 1\}.$

5. Визначити вид кривої

$$z = 2e^{it} + \frac{1}{2e^{it}}.$$

6. Побудувати лінії та області, що задані співвідношеннями

$$\operatorname{Im} z^2 > 2.$$

7. Знайти всі значення функцій

1) $\operatorname{tg}(1 - i)$; 2) i^{2i-1};

3) $\operatorname{Arccos}(-i)$; 4) $\sin\left(\dfrac{\pi}{6} - 3i\right)$.

8. Перевірити, чи є функція $f(z)$ аналітичною, якщо так — знайти її похідну

$$f(z) = \operatorname{sh} x \cos y + i \sin y \operatorname{ch} x.$$

9. Відновити аналітичну функцію $f(z)$, якщо

1) $\operatorname{Re} f(z) = 3x^2y - y^3 + 4x$;

2) $\operatorname{Im} f(z) = 2xy + 2x,\ f(0) = 0$.

10. Знайти коефіцієнт розтягу та кут повороту в точці z_0, при відображенні комплексної площини, яке задається функцією

$$f(z) = \frac{1}{z},\ z_0 = i.$$

11. Обчислити інтеграл
$\int\limits_L \operatorname{Im}(z^3 + 1)dz$,

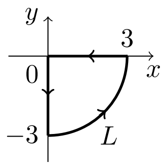
1) $L:\ y = x,\ 0 \to 1 + i$;

2) $L:\ y = x^2,\ 0 \to 1 + i$;

3) $L:$ ламана $z_1z_2z_3,\ z_1 = 0,\ z_2 = 1+i,$
$z_3 = i.$

12. Обчислити інтеграл $\oint\limits_C \operatorname{Im}(z^3 + 1)dz$ по контуру C, який складається з верхнього півкола $|z| = a$ та відрізка дійсної осі, з обходом контура проти годинникової стрілки.

13. Обчислити $\oint\limits_L |z|\bar{z}\, dz$, де крива L задана графічно:



14. Обчислити $\displaystyle\oint\limits_{|z+2i|=2} \frac{dz}{(z^2+1)^2}$ за допомогою теореми Коші, інтегральної формули Коші або формули для похідних.

15. Обчислити $\displaystyle\int\limits_0^{6i} (z^3 - z^2 - 1)dz.$

16. Обчислити $\displaystyle\int\limits_{AB} e^{|z|^2} dz,$

$AB:$ відрізок прямої $z_A = 1 + i,$
$z_B = 0.$

17. Знайти радіус збіжності ряду

$$\sum_{n=0}^{\infty} (in + 1)z^n.$$

Варіант 19

18. Знайти всі лоранівські розвинення функції

1) $f(z) = \dfrac{3z+18}{9z+3z^2-2z^3},\ z_0 = 0;$

2) $f(z) = \dfrac{z+2}{(z-1)(z+3)},\ z_0 = -3-i;$

3) $f(z) = \sin\dfrac{z^2-4z}{(z-2)^2},\ z_0 = 2.$

19. Визначити тип особливих точок функції

1) $f(z) = \dfrac{1-\cos z}{z^2};$

2) $f(z) = \dfrac{\sin z^3 - z^3}{e^z - 1 - z},\ z_0 = 0;$

3) $f(z) = \dfrac{e^{\frac{1}{z}}}{(e^z-1)(1-z)^3}.$

20. За допомогою лишків обчислити інтеграли

1) $\oint\limits_L \dfrac{dz}{(z-1)^2(z+2)},\ L:\ x^{\frac{2}{3}}+y^{\frac{2}{3}} = 3^{\frac{2}{3}};$

2) $\oint\limits_{|z+i|=2} \dfrac{\sin^2 z - 3}{z^2+2\pi z}dz;$

3) $\oint\limits_{|z|=1/2} \dfrac{z^2-3z^3+5z}{z^4}dz;$

4) $\oint\limits_{|z|=2} \dfrac{\operatorname{sh} 3z - \sin 3z}{z^3 \operatorname{sh} z - iz}dz;$

5) $\int\limits_0^{2\pi} \dfrac{dt}{2\sqrt{6}\sin t - 5};$ 6) $\int\limits_0^{2\pi} \dfrac{dt}{(3+\cos t)^2};$

7) $\int\limits_{-\infty}^{\infty} \dfrac{dx}{(x^2+1)^2(x^2+5)^2};$

8) $\int\limits_{-\infty}^{\infty} \dfrac{x \sin x dx}{x^2-2x+10};$

9) $\oint\limits_{|z-5i|=2} \left(\dfrac{\pi i}{e^{\pi z/2}-i} + \dfrac{2\cos\frac{\pi z}{1+5i}}{(z-1-5i)^2(z-3-5i)}\right)dz.$

21. Знайти відображення функцією $\omega = f(z)$ області D, заданої в комплексній площині z, на область D_1 в комплексній площині ω та дати графічну інтерпретацію

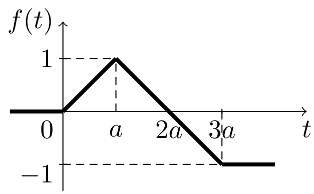
$$\omega = z,\ D:\ \begin{cases} |z| \ge 2 \\ \frac{\pi}{8} \le \arg z \le \frac{\pi}{4} \end{cases}.$$

22. Знайти зображення оригіналу

1) $f(t) = t(e^{-t} + \operatorname{ch} t);$

2) $f(t) = \dfrac{1-\cos t}{t};$

3)



23. Знайти оригінал за даним зображенням

$$F(p) = \frac{e^{-p/2}}{(p^2+1)(p^2+2)}.$$

24. Розв'язати задачу Коші

1) $y' + 2y = 2\eta(t) - \eta(t-1),\ y(0) = 3;$

2) $y'' - y = \dfrac{1}{\operatorname{ch}^3 t},\ y(0) = y'(0) = 0;$

3) $y'' + 4y = 8\sin 2t,$
$y(0) = 3,\ y'(0) = -1;$

4) $\begin{cases} x' = x + y, \\ y' = 4x + y + 1, \end{cases}$
$x(0) = 1,\ y(0) = 0.$

25. Розв'язати інтегральне рівняння

$$y(x) = x - \int\limits_0^x (x-t)y(t)dt.$$

Варіант 20

1. Звести до тригонометричної форми комплексне число

$$\left(1+\sin\frac{\pi}{9}-i\cos\frac{\pi}{9}\right)^{30}.$$

2. Подати в алгебраїчній формі

$$\left(\sin\frac{\pi}{4}+i\left(1-\cos\frac{\pi}{4}\right)\right)^{40}.$$

3. Знайти всі значення кореня та побудувати їх

$$\sqrt[5]{-1-i}.$$

4. Зобразити множину точок

$$\left\{z\in\mathbb{C}\,|\,|z|<2,\ \operatorname{Re}z\geq 1,\ \arg z<\frac{\pi}{4}\right\}.$$

5. Визначити вид кривої

$$z=3e^{it}-\frac{1}{2}e^{-ti}.$$

6. Побудувати лінії та області, що задані співвідношеннями

$$\operatorname{Re}\frac{z-i}{z-1}=0.$$

7. Знайти всі значення функцій

1) $\operatorname{tg}^2(2i)$; 2) $i^{\ln i}$;

3) $\operatorname{Arctg}(-i)$; 4) $\cos\left(\frac{\pi}{3}+3i\right)$.

8. Перевірити, чи є функція $f(z)$ аналітичною, якщо так — знайти її похідну

$$f(z)=e^{x^2+y^2}\cos 2xy-ie^{x^2+y^2}\sin 2xy.$$

9. Відновити аналітичну функцію $f(z)$, якщо

1) $\operatorname{Re}f(z)=1-e^x\sin y,\ f(0)=1+i$;

2) $\operatorname{Im}f(z)=x^2-y^2+3y$.

10. Знайти коефіцієнт розтягу та кут повороту в точці z_0, при відображенні комплексної площини, яке задається функцією

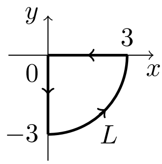
$$f(z)=\frac{z+i}{z-i},\ z_0=1.$$

11. Обчислити інтеграл $\int\limits_L z\bar{z}^2dz$,

1)$L:\ y=x,\ 0\to 1+i$;
2)$L:\ y=x^2,\ 0\to 1+i$;
3)$L:$ ламана $z_1z_2z_3,\ z_1=0,\ z_2=1+i,\ z_3=i$.

12. Обчислити інтеграл $\oint\limits_C z\bar{z}^2dz$ по контуру C, який складається з верхнього півкола $|z|=a$ та відрізка дійсної осі, з обходом контура проти годинникової стрілки.

13. Обчислити $\oint\limits_L z\bar{z}dz$, де крива L задана графічно:



14. Обчислити

1) $\displaystyle\oint\limits_{|z-1|=R}\frac{e^z}{z(1-z)^3}dz,\ R<\frac{1}{2}$;

2) $\displaystyle\oint\limits_{|z|=R}\frac{e^z}{z(1-z)^3}dz,\ R<\frac{1}{2}$.

15. Обчислити $\int\limits_0^\pi \cos iz\,dz$.

16. Обчислити $\int\limits_L z|z|\,dz$,

$L:\ \{|z|=1,\ \operatorname{Im}z\geq 0\}$.

17. Знайти радіус збіжності ряду

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{z}{2i}\right)^n.$$

Варіант 20

18. Знайти всі лоранівські розвинення функції

1) $f(z) = \dfrac{2z+16}{8z^2+2z^3-z^4}$, $z_0 = 0$;

2) $f(z) = \dfrac{z+2}{(z-1)(z+3)}$, $z_0 = -2+i$;

3) $f(z) = e^{\frac{4z-2z^2}{(z-i)^2}}$, $z_0 = 1$.

19. Визначити тип особливих точок функції

1) $f(z) = e^{\frac{1}{z+2}}$;

2) $f(z) = \dfrac{\cos z^3 - 1}{\sin z - z + \frac{z^3}{6}}$, $z_0 = 0$;

3) $f(z) = \dfrac{1}{z^2} + \sin\dfrac{1}{z^2}$.

20. За допомогою лишків обчислити інтеграли

1) $\displaystyle\oint\limits_{|z|=2} \frac{1}{z-1}\sin\frac{1}{z}\,dz$;

2) $\displaystyle\oint\limits_{|z|=1/4} \frac{\ln(e+z)}{z\sin\left(z+\frac{\pi}{4}\right)}dz$;

3) $\displaystyle\oint\limits_{|z|=2} \frac{z-\sin z}{z^4}dz$;

4) $\displaystyle\oint\limits_{|z|=0{,}5} \frac{e^{5z}-1-\sin 5z}{z^2\operatorname{sh}5z}dz$;

5) $\displaystyle\int\limits_0^{2\pi} \frac{dt}{\sqrt{35}\sin t - 6}$;

6) $\displaystyle\int\limits_0^{2\pi} \frac{dt}{\left(\sqrt{7}+\sqrt{2}\cos t\right)^2}$;

7) $\displaystyle\int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{x^4+7x^2+12}$;

8) $\displaystyle\int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{x\cos x}{x^2-2x+10}\,dx$;

9) $\displaystyle\oint\limits_{|z-5|=2} \left(z\sin\frac{i}{z-5} + \frac{2\operatorname{sh}\left(\frac{\pi i z}{12}\right)}{(z-6)^2(z-8)}\right)dz$.

21. Знайти відображення функцією $\omega = f(z)$ області D, заданої в комплексній площині z, на область D_1 в комплексній площині ω та дати графічну інтерпретацію

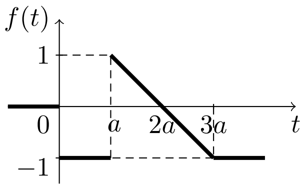
$$\omega = 8z - 1,\ D:\ x^2+y^2 > 4.$$

22. Знайти зображення оригіналу

1) $f(t) = (t^2 - t)\cos t$;

2) $f(t) = \dfrac{1-\operatorname{ch} t}{t}e^{-t}$;

3)



23. Знайти оригінал за даним зображенням

$$F(p) = \frac{5}{(p-1)(p^2+4p+5)}.$$

24. Розв'язати задачу Коші

1) $y'' + 2y' = \eta(t-2)$, $y(0) = 1$, $y'(0) = 0$;

2) $y'' - y = \dfrac{e^{2t}}{(1+e^t)^2}$, $y(0) = y'(0) = 0$;

3) $y'' - y' - 6y = 2$, $y(0) = 1$, $y'(0) = 0$;

4) $\begin{cases} x' = x - 2y + 1, \\ y' = -3x, \end{cases}$
$x(0) = 0$, $y(0) = 1$.

25. Розв'язати інтегральне рівняння

$$y(x) = 1 + x + \int\limits_0^x \sin(x-t)y(t)dt.$$

Варіант 21

1. Звести до тригонометричної форми комплексне число

$$\left(\sin\frac{\pi}{14} + i\cos\frac{\pi}{14}\right)^{49}.$$

2. Подати в алгебраїчній формі

$$\left(1 + \cos\frac{\pi}{4} + i\sin\frac{\pi}{4}\right)^{8}.$$

3. Знайти всі значення кореня та побудувати їх

$$\sqrt[6]{1 + i\sqrt{3}}.$$

4. Зобразити множину точок

$$\{z \in \mathbb{C} |\, |z| > 1,\ -1 < \operatorname{Im} z \le 1,\ 0 < \operatorname{Re} z \le 2\}.$$

5. Визначити вид кривої

$$z = -2e^{it} + \frac{1}{e^{it}}.$$

6. Побудувати лінії та області, що задані співвідношеннями

$$\operatorname{Im}\frac{z-i}{z-1} = 0.$$

7. Знайти всі значення функцій

1) $\sin i$; 2) $(\ln i)^i$;

3) $\operatorname{Arctg}(-i)$; 4) $\operatorname{Ln}(1-i)$.

8. Перевірити, чи є функція $f(z)$ аналітичною, якщо так — знайти її похідну

$$f(z) = e^{x^2-y^2}\cos 2xy + ie^{x^2-y^2}\sin 2xy.$$

9. Відновити аналітичну функцію $f(z)$, якщо

1) $\operatorname{Re} f(z) = x^2 - y^2 + 5x$;

2) $\operatorname{Im} f(z) = \dfrac{e^{2x}-1}{e^x}\sin y,\ f(0) = 2.$

10. Знайти коефіцієнт розтягу та кут повороту в точці z_0, при відображенні комплексної площини, яке задається функцією

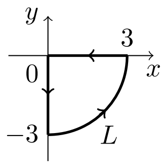
$$f(z) = \sin z,\ z_0 = \frac{\pi}{2} + i.$$

11. Обчислити інтеграл $\int\limits_L \bar{z}^3\,dz$,

1)$L:\ y = x,\ 0 \to 1 + i$;
2)$L:\ y = x^2,\ 0 \to 1 + i$;
3)$L:$ ламана $z_1z_2z_3,\ z_1 = 0,\ z_2 = 1+i,\ z_3 = i$.

12. Обчислити інтеграл $\oint\limits_C \bar{z}^3\,dz$ по контуру C, який складається з верхнього півкола $|z| = a$ та відрізка дійсної осі, з обходом контура проти годинникової стрілки.

13. Обчислити $\oint\limits_L \operatorname{Re}\frac{\bar{z}}{z}dz$, де крива L задана графічно:



14. Обчислити $\oint\limits_{|z-i|=1} \dfrac{z^2}{(z-i)^3}\,dz$ за допомогою теореми Коші, інтегральної формули Коші або формули для похідних.

15. Обчислити $\int\limits_1^{1+i} (1+i)z\,dz$.

16. Обчислити $\int\limits_L (2z+1)\,dz$,

$L:\ y = x^3,\ 0 \to 1 + i.$

17. Знайти радіус збіжності ряду

$$\sum_{n=0}^{\infty} \cos(in^2)z^n.$$

Варіант 21

18. Знайти всі лоранівські розвинення функції

1) $f(z) = \dfrac{5z+20}{25z+5z^2-2z^3},\ z_0 = 0;$

2) $f(z) = \dfrac{z-1}{(z+1)(z-3)},\ z_0 = -1-2i;$

3) $f(z) = ze^{\frac{\pi}{z-a}},\ z_0 = a.$

19. Визначити тип особливих точок функції

1) $f(z) = \cos\dfrac{1}{z};$

2) $f(z) = \dfrac{\sin z^3 - z^3}{e^z - 1 - z},\ z_0 = 0;$

3) $f(z) = \dfrac{z^2}{(z^2-4)^2 \cos\frac{1}{z-2}}.$

20. За допомогою лишків обчислити інтеграли

1) $\displaystyle\oint\limits_{|z|=2} \operatorname{tg} z\, dz;$

2) $\displaystyle\oint\limits_{|z|=\frac{\pi}{2}} \frac{z^2+z+3}{(\pi+z)\sin z}dz;$

3) $\displaystyle\oint\limits_{|z|=3} \frac{\cos z^2 - 1}{z^4}dz;$

4) $\displaystyle\oint\limits_{|z|=2} \frac{\sin 3z - 3z}{z^2 \operatorname{sh}^2 iz}dz;$

5) $\displaystyle\int\limits_0^{2\pi} \frac{dt}{4\sqrt{3}\sin t - 7};$

6) $\displaystyle\int\limits_0^{2\pi} \frac{dt}{\left(\sqrt{13}+2\sqrt{3}\cos t\right)^2};$

7) $\displaystyle\int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{x^2+4}{(x^2+9)^2}dx;$ 8) $\displaystyle\int\limits_0^{\infty} \frac{x\sin\frac{x}{2}}{x^2+4}dx;$

9) $\displaystyle\oint\limits_{|z+i|=2} \left(\frac{4\sin\frac{\pi z}{2+2i}}{(z-1-i)^2(z-3-i)} + \frac{\pi i}{e^{\pi z/2} - i}\right) dz.$

21. Знайти відображення функцією $\omega = f(z)$ області D, заданої в комплексній площині z, на область D_1 в комплексній площині ω та дати графічну інтерпретацію

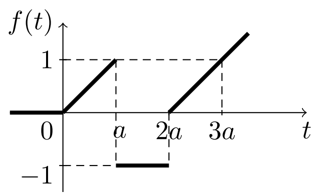
$$\omega = \operatorname{ctg} z,\ D:\ 0 < x < \frac{\pi}{4}.$$

22. Знайти зображення оригіналу

1) $f(t) = t^2 \sin 5t;$

2) $f(t) = \dfrac{\operatorname{ch} 2t - \operatorname{ch} 4t}{t}e^{-2t};$

3)



23. Знайти оригінал за даним зображенням

$$F(p) = \frac{5p}{(p+2)(p^2-2p+2)}.$$

24. Розв'язати задачу Коші

1) $y'' + 3y = \eta(t) - \eta(t-4),$
$y(0) = y'(0) = 0;$

2) $y'' + 2y' + y = \dfrac{te^{-t}}{t+1},\ y(0) = y'(0) = 0;$

3) $y'' + 4y = 4e^{2t} + 4t^2,$
$y(0) = 1,\ y'(0) = 2;$

4) $\begin{cases} x' = 3y + 2, \\ y' = x + 2y, \end{cases}$
$x(0) = -1,\ y(0) = 1.$

25. Розв'язати інтегральне рівняння

$$y(x) = \operatorname{sh} x + \int\limits_0^x (x-1)y(t)dt.$$

Варіант 22

1. Звести до тригонометричної форми комплексне число

$$\left(1-\sin\frac{\pi}{18}-i\cos\frac{\pi}{18}\right)^{81}.$$

2. Подати в алгебраїчній формі

$$\left(\frac{2+2\sqrt{3}i}{1-i}\right)^{12}.$$

3. Знайти всі значення кореня та побудувати їх

$$\sqrt[3]{8}.$$

4. Зобразити множину точок

$$\{z\in\mathbb{C}|\,|z-1|>1,\ -1\le\operatorname{Im}z<0,\ 0\le\operatorname{Re}z<3\}.$$

5. Визначити вид кривої

$$z=2e^{it}-\frac{1}{2e^{it}}.$$

6. Побудувати лінії та області, що задані співвідношеннями

$$\operatorname{Im}z-1=|z|.$$

7. Знайти всі значення функцій

1) $\cos(1-i)$; 2) $(1-2i)^{i+1}$;

3) $\operatorname{Arcsin}(-3i)$; 4) $\operatorname{sh}\left(1-\dfrac{i\pi}{3}\right)$.

8. Перевірити, чи є функція $f(z)$ аналітичною, якщо так — знайти її похідну

$$f(z)=\left(2x^3-3y^2x\right)+i\left(6x^2y-y^3\right).$$

9. Відновити аналітичну функцію $f(z)$, якщо

1) $\operatorname{Im}f(z)=2^y\cos(x\ln 2)$;

2) $\operatorname{Re}f(z)=1-\dfrac{y}{x^2+y^2},\ f(1)=1+i.$

10. Знайти коефіцієнт розтягу та кут повороту в точці z_0, при відображенні комплексної площини, яке задається функцією

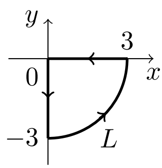
$$f(z)=\cos z,\ z_0=\frac{\pi}{2}-i.$$

11. Обчислити інтеграл $\int\limits_L (i\operatorname{Im}z)^2\,dz$,

1) $L:\ y=x,\ 0\to 1+i$;
2) $L:\ y=x^2,\ 0\to 1+i$;
3) $L:$ ламана $z_1z_2z_3,\ z_1=0,\ z_2=1+i,\ z_3=i.$

12. Обчислити інтеграл $\oint\limits_C (i\operatorname{Im}z)^2\,dz$ по контуру C, який складається з верхнього півкола $|z|=a$ та відрізка дійсної осі, з обходом контура проти годинникової стрілки.

13. Обчислити $\oint\limits_L (\bar{z}-\operatorname{Im}z)\,dz$, де крива L задана графічно:



14. Обчислити $\oint\limits_L \dfrac{dz}{z^3(z+1)}$, де

1) $L:\ |z|=R,\ R<1$;
2) $L:\ |z+1|=R,\ R<1$

за допомогою теореми Коші, інтегральної формули Коші або формули для похідних.

15. Обчислити $\int\limits_0^{\pi} e^{-iz}dz.$

16. Обчислити $\int\limits_L (2z+1)\,dz$,

$L:\ y=x^3,\ 0\to 1+i.$

17. Знайти радіус збіжності ряду

$$\sum_{n=1}^{\infty}2^{in}\frac{z^n}{n}.$$

Варіант 22

18. Знайти всі лоранівські розвинення функції

1) $f(z) = \dfrac{3z+36}{18z^2+3z^3-z^4},\ z_0 = 0;$

2) $f(z) = \dfrac{z-2}{(z+1)(z-3)},\ z_0 = 3+i;$

3) $f(z) = ze^{\frac{\pi z}{z-\pi}},\ z_0 = \pi.$

19. Визначити тип особливих точок функції

1) $f(z) = \dfrac{\sin z}{z - \sin z};$

2) $f(z) = \dfrac{\sin 6z - 6z}{\operatorname{sh} z - z - \frac{z^3}{6}},\ z_0 = 0;$

3) $f(z) = z^2 \sin\dfrac{1}{z}.$

20. За допомогою лишків обчислити інтеграли

1) $\displaystyle\oint\limits_L \frac{\sin \pi z}{(z^2-1)^2}dz,\ L:\ \frac{x^2}{4}+y^2 = 1;$

2) $\displaystyle\oint\limits_{|z|=1} \frac{z^3-i}{\sin 2z\,(z-\pi)}dz;$

3) $\displaystyle\oint\limits_{|z|=1/2} \frac{2+3z^3-5z^4}{z^5}dz;$

4) $\displaystyle\oint\limits_{|z|=2} \frac{\cos 2z - 1 + 2z^2}{z^4 \operatorname{sh}\frac{\pi z}{3}}dz;$

5) $\displaystyle\int_0^{2\pi} \frac{dt}{4\sin t + 5};$

6) $\displaystyle\int_0^{2\pi} \frac{dt}{\left(2+\sqrt{3}\cos t\right)^2};$

7) $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{(x^2+1)^5};$

8) $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin 2x}{(x^2-x+1)^2}dx;$

9) $\displaystyle\oint\limits_{|z-6|=2} \left(ze^{\frac{1}{z-6}} + \frac{2\operatorname{ch}\frac{\pi i z}{5}}{(z-5)^2(z-3)}\right)dz.$

21. Знайти відображення функцією $\omega = f(z)$ області D, заданої в комплексній площині z, на область D_1 в комплексній площині ω та дати графічну інтерпретацію

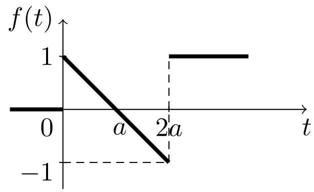
$$\omega = e^z,\ D:\ 0 < y < \frac{\pi}{2}.$$

22. Знайти зображення оригіналу

1) $f(t) = (t+1)\sin 5t;$

2) $f(t) = \dfrac{1-e^{3t}}{t}e^{-3t};$

3)



23. Знайти оригінал за даним зображенням

$$F(p) = \frac{1}{(p-2)(p^2+2p+3)}.$$

24. Розв'язати задачу Коші

1) $y' + 4y = \eta(t) + \eta(t-1),\ y(0) = 0;$

2) $y'' - y' = \dfrac{e^{2t}}{2+e^t},\ y(0) = y'(0) = 0;$

3) $y'' + 4y' + 4y = t^2e^{2t},$
$y(0) = 1, y'(0) = 2;$

4) $\begin{cases} x' = x + 4y + 1, \\ y' = 2x + 3y, \end{cases}$
$x(0) = 0,\ y(0) = 1.$

25. Розв'язати інтегральне рівняння

$$y(x) = 1 + 2\int_0^x \cos(x-t)\,y(t)\,dt.$$

Варіант 23

1. Звести до тригонометричної форми комплексне число
$$\left(-\cos\frac{\pi}{13}-i\sin\frac{\pi}{13}\right)^{13}.$$

2. Подати в алгебраїчній формі
$$\left(\frac{1-i\sqrt{3}}{1+i}\right)^{8}.$$

3. Знайти всі значення кореня та побудувати їх
$$\sqrt[3]{i}.$$

4. Зобразити множину точок
$$\left\{z\in\mathbb{C}\big||z+i|<1,-\frac{3\pi}{4}\le\arg z\le-\frac{\pi}{4}\right\}.$$

5. Визначити вид кривої
$$z=\frac{1+t}{1-t}+i\frac{2+t}{2-t}.$$

6. Побудувати лінії та області, що задані співвідношеннями
$$\operatorname{Im}\frac{z+i}{z+1}=0.$$

7. Знайти всі значення функцій
1) $\operatorname{ctg}^2(1+i)$; 2) $\operatorname{Ln}(ei)$;
3) $\operatorname{Arccos}(-3i)$; 4) $\operatorname{ch}\left(2-\dfrac{\pi i}{6}\right)$.

8. Перевірити, чи є функція $f(z)$ аналітичною, якщо так — знайти її похідну
$$f(z)=\left(2x^2-2y^2-3x\right)+i(4xy+3y).$$

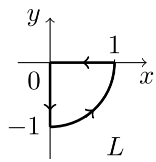
9. Відновити аналітичну функцію $f(z)$, якщо
1) $\operatorname{Re} f(z)=3^x\sin(y\ln 3)$;
2) $\operatorname{Im} f(z)=x^2-y^2-x,\ f(0)=1$.

10. Знайти коефіцієнт розтягу та кут повороту в точці z_0, при відображенні комплексної площини, яке задається функцією
$$f(z)=\sin z,\ z_0=i-\frac{\pi}{2}.$$

11. Обчислити інтеграл
$\int\limits_L(\bar z+\operatorname{Im}\bar z)\,dz$,
1)$L:\ y=x,\ 0\to 1+i$;
2)$L:\ y=x^2,\ 0\to 1+i$;
3)$L:$ ламана $z_1z_2z_3,\ z_1=0,\ z_2=1+i,$ $z_3=i$.

12. Обчислити інтеграл
$\oint\limits_C(\bar z+\operatorname{Im}\bar z)\,dz$ по контуру C, який складається з верхнього півкола $|z|=a$ та відрізка дійсної осі, з обходом контура проти годинникової стрілки.

13. Обчислити $\oint\limits_L(\bar z+\operatorname{Im} z)\,dz$, де крива L задана графічно:



14. Обчислити $\oint\limits_L\dfrac{dz}{z(z^2+1)}$, де
1)$L:\ |z|=R,\ R<1$;
2)$L:\ |z+1|=R,\ R<1$
за допомогою теореми Коші, інтегральної формули Коші або формули для похідних.

15. Обчислити $\int\limits_0^{-1+i}\left(3z^2+z\right)dz$.

16. Обчислити $\int\limits_L z\bar z\,dz$,
$L:\ \{|z|=1,\ \operatorname{Re} z\ge 0,\ \operatorname{Im} z\ge 0\}$.

17. Знайти радіус збіжності ряду
$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{z^n}{i^{in}}.$$

Варіант 23

18. Знайти всі лоранівські розвинення функції

1) $f(z) = \dfrac{7z+98}{49z+7z^2-2z^3},\ z_0 = 0;$

2) $f(z) = \dfrac{z-2}{(z+1)(z-3)},\ z_0 = 2-2i;$

3) $f(z) = z\sin\pi\dfrac{z+2}{z},\ z_0 = 0.$

19. Визначити тип особливих точок функції

1) $f(z) = \dfrac{1}{e^{-z}-1};$

2) $f(z) = z\sin\dfrac{3}{z^3},\ z_0 = 0;$

3) $f(z) = \dfrac{\cos\frac{\pi}{2}z}{z^4-1}.$

20. За допомогою лишків обчислити інтеграли

1) $\displaystyle\oint\limits_{|z|=4} \frac{e^z}{z^2(z^2-9)}dz;$

2) $\displaystyle\oint\limits_{|z-i|=2} \frac{z(z+\pi)}{\sin 2z}dz;$

3) $\displaystyle\oint\limits_{|z|=1} \frac{2e^{1/z}-z-1}{z^3}dz;$

4) $\displaystyle\oint\limits_{|z|=5} \frac{\sin 3z-3z}{z^2\,\mathrm{sh}^2\, iz}dz;$ 5) $\displaystyle\int\limits_0^{2\pi}\frac{dt}{3\sin t+5};$

6) $\displaystyle\int\limits_0^{2\pi}\frac{dt}{\left(\sqrt{13}+2\sqrt{3}\cos t\right)^2};$

7) $\displaystyle\int\limits_{-\infty}^{\infty}\frac{dx}{(x^2+2)^2(x^2+10)^2};$

8) $\displaystyle\int\limits_{-\infty}^{\infty}\frac{\sin 2x}{(x^2-x+1)^2}\,dx;$

9) $\displaystyle\oint\limits_{|z-6i|=2}\left(\frac{\pi i}{e^{\pi z/2}+1}-\right.$

$\displaystyle\left.-\frac{8\,\mathrm{ch}\,\frac{\pi i z}{1+6i}}{(z-1-6i)^2(z-3-6i)}\right)dz.$

21. Знайти відображення функцією $\omega = f(z)$ області D, заданої в комплексній площині z, на область D^* в комплексній площині ω та дати графічну інтерпретацію

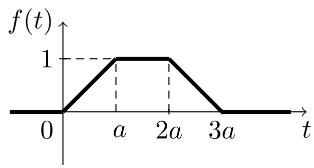
$$\omega = \frac{i-z}{i+z},\ D:\ x>0,\ y<0.$$

22. Знайти зображення оригіналу

1) $f(t) = t\sin t\,\mathrm{sh}\,5t;$

2) $f(t) = \dfrac{e^t-t-1}{t};$

3)



23. Знайти оригінал за даним зображенням

$$F(p) = \frac{p}{(p^2+4p+8)^2}.$$

24. Розв'язати задачу Коші

1) $2y'+3y = \eta(t)-2\eta(t-3),\ y(0)=0;$

2) $y''-y = \dfrac{\mathrm{sh}\,t}{\mathrm{ch}^2\,t},\ y(0)=y'(0)=0;$

3) $y''-3y'+2y = 12e^{3t},$
$y(0)=2,\ y'(0)=6;$

4) $\begin{cases} x' = 2y, \\ y' = 2x+3y+1, \end{cases}$
$x(0)=2,\ y(0)=1.$

25. Розв'язати інтегральне рівняння

$$y(x) = e^x + 2\int\limits_0^x \cos(x-t)\,y(t)\,dt.$$

Варіант 24

1. Звести до тригонометричної форми комплексне число

$$\left(\cos\frac{\pi}{12}+i+i\sin\frac{\pi}{12}\right)^{48}.$$

2. Подати в алгебраїчній формі

$$\left(\frac{-\sqrt{2}+i\sqrt{2}}{1+i}\right)^{10}.$$

3. Знайти всі значення кореня та побудувати їх

$$\sqrt[3]{1-i}.$$

4. Зобразити множину точок

$$\{z\in\mathbb{C}|\,|z-i|\le 1,\\ -\frac{\pi}{2}<\arg(z-i)<\frac{\pi}{4}\}.$$

5. Визначити вид кривої

$$z=\frac{t-1+it}{t(t-1)}.$$

6. Побудувати лінії та області, що задані співвідношеннями

$$|z+1|+|z-1|\le 3.$$

7. Знайти всі значення функцій

1) $\sin\dfrac{i}{2}$; 2) $(\pi i)^i$;

3) $\mathrm{Arctg}\,(i+2)$; 4) 1^{2i}.

8. Перевірити, чи є функція $f(z)$ аналітичною, якщо так — знайти її похідну

$$f(z)=z^2-\mathrm{Re}\,z.$$

9. Відновити аналітичну функцію $f(z)$, якщо

1) $\mathrm{Im}\,f(z)=2^y\sin(x\ln 2)$;

2) $\mathrm{Re}\,f(z)=e^{-y}\sin x$, $f(0)=1$.

10. Знайти коефіцієнт розтягу та кут повороту в точці z_0, при відображенні комплексної площини, яке задається функцією

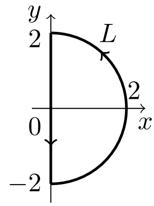
$$f(z)=\cos z,\ z_0=i+\pi.$$

11. Обчислити інтеграл $\int\limits_L \mathrm{Im}\left(\bar{z}^3+1\right)dz$,

1) $L:\ y=x,\ 0\to 1+i$;
2) $L:\ y=x^2,\ 0\to 1+i$;
3) $L:$ ламана $z_1z_2z_3,\ z_1=0,\ z_2=1+i,\ z_3=i$.

12. Обчислити інтеграл $\oint\limits_C \mathrm{Im}\left(\bar{z}^3+1\right)dz$ по контуру C, який складається з верхнього півкола $|z|=a$ та відрізка дійсної осі, з обходом контура проти годинникової стрілки.

13. Обчислити $\oint\limits_L z\,\mathrm{Re}\,z^2\,dz$, де крива L задана графічно:



14. Обчислити $\oint\limits_L \dfrac{\sin z}{z(z+1)}dz$, де

1) $L:\ |z|=R,\ R<1$;
2) $L:\ |z+1|=R,\ R<1$

за допомогою теореми Коші, інтегральної формули Коші або формули для похідних.

15. Обчислити $\int\limits_0^{\pi i}\dfrac{1}{z}\,dz$.

16. Обчислити $\int\limits_L\left(\cos iz+3z^2\right)dz$,

$L:\ \{|z|=1,\ \mathrm{Im}\,z\ge 0\}$.

17. Знайти радіус збіжності ряду

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2^{in}}{n}z^n.$$

Варіант 24

18. Знайти всі лоранівські розвинення функції

1) $f(z) = \dfrac{4z+64}{32z^2+4z^3-z^4}$, $z_0 = 0$;

2) $f(z) = \dfrac{z-2}{(z+1)(z-3)}$, $z_0 = -2-i$;

3) $f(z) = z\cos\pi\dfrac{z+3}{z-1}$, $z_0 = 1$.

19. Визначити тип особливих точок функції

1) $f(z) = \dfrac{z}{z^6+2z^5+z^4}$;

2) $f(z) = \dfrac{\cos 5z - 1}{\operatorname{ch} z - 1 - \frac{z^2}{2}}$, $z_0 = 0$;

3) $f(z) = \dfrac{\sin\pi z}{(z^3-1)^2}$.

20. За допомогою лишків обчислити інтеграли

1) $\displaystyle\oint\limits_{|z|=1/2} \frac{z^3}{1+2z^4}\,dz$;

2) $\displaystyle\oint\limits_{|z|=2} \frac{z^2+\sin z+2}{z^2+\pi z}dz$;

3) $\displaystyle\oint\limits_{|z|=2} z^2\sin\frac{i}{z^2}dz$;

4) $\displaystyle\oint\limits_{|z|=4} \frac{\operatorname{ch} 2z - 1 - 2z^2}{z^4\sin\frac{2\pi z}{3}}dz$;

5) $\displaystyle\int\limits_0^{2\pi} \frac{dt}{3\sqrt{7}\sin t+8}$; 6) $\displaystyle\int\limits_0^{2\pi} \frac{dt}{(2+\cos t)^2}$;

7) $\displaystyle\int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{x^2-1}{(x^2+8x+17)^2}dx$;

8) $\displaystyle\int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{(x^3+5x)\sin x}{x^4+10x^2+9}dx$;

9) $\displaystyle\oint\limits_{|z-5|=2} \left(\frac{4\cos\frac{\pi z}{4}}{(z-4)^2(z-2)} + z\operatorname{ch}\frac{2}{z-5}\right)dz.$

21. Знайти відображення функцією $\omega = f(z)$ області D, заданої в комплексній площині z, на область D_1 в комплексній площині ω та дати графічну інтерпретацію

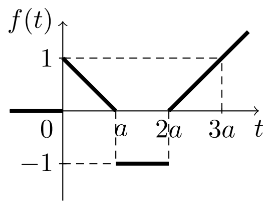
$$\omega = \frac{1}{2}\frac{z+1}{z},\ D: \begin{cases} |z| < 1 \\ 0 < \arg z < \dfrac{\pi}{4} \end{cases}.$$

22. Знайти зображення оригіналу

1) $f(t) = t\operatorname{ch} 2t\cos t$;

2) $f(t) = \displaystyle\int\limits_0^t \frac{\sin 3\tau}{\tau}d\tau$;

3)



23. Знайти оригінал за даним зображенням

$$F(p) = \frac{1-p}{p(p^2+3p+3)}.$$

24. Розв'язати задачу Коші

1) $y' + y = \eta(t-2) - 2\eta(t-3)$,
$y(0) = 0$;

2) $y'' + y' = \dfrac{e^t}{(1+e^t)^2}$, $y(0) = y'(0) = 0$;

3) $y'' + 4y = 3\sin t + 10\cos 3t$,
$y(0) = -2$, $y'(0) = 3$;

4) $\begin{cases} x' = y - 2x + 2, \\ y' = 2x + 3y, \end{cases}$
$x(0) = 0$, $y(0) = 1$.

25. Розв'язати інтегральне рівняння

$$x^2 + x = \int\limits_0^x \cos(x-t)\,y(t)\,dt.$$

Варіант 25

1. Звести до тригонометричної форми комплексне число

$$\left(-\cos\frac{\pi}{7}+i\sin\frac{\pi}{7}\right)^{42}.$$

2. Подати в алгебраїчній формі

$$\left(\frac{-2-2i}{i+\sqrt{3}}\right)^{8}.$$

3. Знайти всі значення кореня та побудувати їх

$$\sqrt[3]{-2+2i}.$$

4. Зобразити множину точок

$$\{z\in\mathbb{C}|\,z\bar{z}<2,\ \operatorname{Re}z\le 1,\ \operatorname{Im}z>-1\}.$$

5. Визначити вид кривої

$$z=\frac{1+t}{1-t}+\frac{t}{1-t}\,(2-4i)\,.$$

6. Побудувати лінії та області, що задані співвідношеннями

$$\left|\frac{z-3}{z-2}\right|\ge 1.$$

7. Знайти всі значення функцій

1) $\cos(3i-1)$; 2) $(1-i)^{10i}$;

3) $\operatorname{Arctg}(i+3)$; 4) $\sin\left(\frac{\pi}{3}-2i\right)$.

8. Перевірити, чи є функція $f(z)$ аналітичною, якщо так — знайти її похідну

$$f(z)=\operatorname{ch}z.$$

9. Відновити аналітичну функцію $f(z)$, якщо

1) $\operatorname{Re}f(z)=\dfrac{x+1}{(x+1)^2+y^2},\ f(0)=1$;

2) $\operatorname{Re}f(z)=2y^2-2x^2+x$.

10. Знайти коефіцієнт розтягу та кут повороту в точці z_0, при відображенні комплексної площини, яке задається функцією

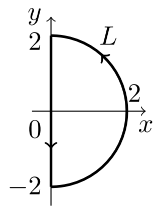
$$f(z)=e^{z},\ z_0=1+\frac{\pi}{3}i.$$

11. Обчислити інтеграл $\int\limits_L \bar{z}^2\operatorname{Im}z\,dz$,

1)$L:\ y=x,\ 0\to 1+i$;
2)$L:\ y=x^2,\ 0\to 1+i$;
3)$L:$ ламана $z_1z_2z_3,\ z_1=0,\ z_2=1+i,\ z_3=i$.

12. Обчислити інтеграл $\oint\limits_C \bar{z}^2\operatorname{Im}z,dz$ по контуру C, який складається з верхнього півкола $|z|=a$ та відрізка дійсної осі, з обходом контура проти годинникової стрілки.

13. Обчислити $\oint\limits_L \operatorname{Im}z^2\,dz$, де крива L задана графічно:



14. Обчислити $\oint\limits_{|z|=2}\dfrac{dz}{z^2(z-1)}$ за допомогою теореми Коші, інтегральної формули Коші або формули для похідних.

15. Обчислити $\int\limits_0^{1+i} e^{iz}dz$.

16. Обчислити $\int\limits_L |z|\,dz$,

$$L:\ \left\{|z|=\sqrt{2},\ \frac{3\pi}{4}\le\arg z\le\frac{\pi}{4}\right\}.$$

17. Знайти радіус збіжності ряду

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\sin(in)}{5^n}z^n.$$

Варіант 25

18. Знайти всі лоранівські розвинення функції

1) $f(z) = \dfrac{9z+162}{81z+9z^2-2z^3},\ z_0 = 0;$

2) $f(z) = \dfrac{2z}{z^2+4},\ z_0 = -1-3i;$

3) $f(z) = z^2 \sin\dfrac{z+3}{z},\ z_0 = 0.$

19. Визначити тип особливих точок функції

1) $f(z) = \dfrac{z^2}{\cos z - 1};$

2) $f(z) = \dfrac{\operatorname{sh} 4z - 4z}{e^z - 1 - z},\ z_0 = 0;$

3) $f(z) = \dfrac{\sin^3 z}{z(1-\cos z)}.$

20. За допомогою лишків обчислити інтеграли

1) $\displaystyle\oint\limits_{|z-2|=1/2} \frac{z}{(z-1)(z-2)^2}\,dz;$

2) $\displaystyle\oint\limits_{|z-3/2|=1} \frac{z(z+\pi)}{\sin 3z\,(z-\pi)}dz;$

3) $\displaystyle\oint\limits_{|z|=1/2} \frac{z^4+2z^2+3}{3z^6}dz;$

4) $\displaystyle\oint\limits_{|z|=0{,}4} \frac{e^{2z}-1-2z}{z\operatorname{sh}^2 2\pi z}dz;$

5) $\displaystyle\int\limits_0^{2\pi} \frac{dt}{4\sqrt{5}\sin t + 9};$ 6) $\displaystyle\int\limits_0^{2\pi} \frac{dt}{(3+2\cos t)^2};$

7) $\displaystyle\int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{x^2+10}{(x^2+4)^2}dx;$ 8) $\displaystyle\int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{x^2\cos x dx}{x^4+10x^2+9};$

9) $\displaystyle\oint\limits_{|z+6i|=2} \left(\frac{4\operatorname{sh}\frac{\pi i z}{2-12i}}{(z-1+6i)(z-3+6i)} - \frac{\pi i}{e^{\pi z/2}+1}\right)dz.$

21. Знайти відображення функцією $\omega = f(z)$ області D, заданої в комплексній площині z, на область D_1 в комплексній площині ω та дати графічну інтерпретацію

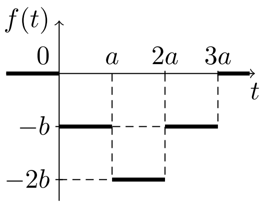
$$\omega = z^2,\ \ D: \begin{cases} x \in [0;2], \\ y \in [0;2],\ y \geq x \end{cases}.$$

22. Знайти зображення оригіналу

1) $f(t) = t^2 \sin 4t;$

2) $f(t) = \dfrac{e^{-2t}\cos 2t}{t};$

3)



23. Знайти оригінал за даним зображенням

$$F(p) = \frac{2p+1}{(p+1)(p^2+2p+3)}.$$

24. Розв'язати задачу Коші

1) $y'' + 4y = \eta(t) - \eta(t-2\pi),$
$y(0) = y'(0) = 0;$

2) $y'' + 2y' + y = \dfrac{e^{-t}}{1+t^2},$
$y(0) = y'(0) = 0;$

3) $y'' + 2y' + 10y = 2e^{-t}\cos 3t,$
$y(0) = 5,\ y'(0) = 1;$

4) $\begin{cases} x' = 4x + 3, \\ y' = x + 2y, \end{cases}$
$x(0) = -1,\ y(0) = 0.$

25. Розв'язати інтегральне рівняння

$$x^2 e^x = \int\limits_0^x e^{2(x-t)} y(t)\,dt.$$

Варіант 26

1. Звести до тригонометричної форми комплексне число

$$\left(\cos\frac{\pi}{8}+i-i\sin\frac{\pi}{8}\right)^{92}.$$

2. Подати в алгебраїчній формі

$$\left(\frac{1+i\sqrt{3}}{i-1}\right)^{8}.$$

3. Знайти всі значення кореня та побудувати їх

$$\sqrt[4]{-81}.$$

4. Зобразити множину точок

$$\left\{z\in\mathbb{C}\,|\,z\bar{z}\le 2,\ \operatorname{Re}z<1,\ \operatorname{Im}z>-1\right\}.$$

5. Визначити вид кривої

$$z=\frac{2+t}{2-t}+i\frac{1+t}{1-t}.$$

6. Побудувати лінії та області, що задані співвідношеннями

$$0<\operatorname{Re}iz<1,\ |z+1|\ge 1.$$

7. Знайти всі значення функцій

1) $\operatorname{ch}(1-i)$; 2) $\operatorname{Ln}(1+i)^{10}$;

3) $\operatorname{Arcsin}\dfrac{2}{i}$; 4) $\cos\left(\dfrac{\pi}{6}-i\right)$.

8. Перевірити, чи є функція $f(z)$ аналітичною, якщо так — знайти її похідну

$$f(z)=z-3\bar{z}+1.$$

9. Відновити аналітичну функцію $f(z)$, якщо

1) $\operatorname{Re}f(z)=\dfrac{x}{x^2+y^2}+x,\ f(1)=2;$

2) $\operatorname{Im}f(z)=3^{-y}\cos(x\ln 3)$.

10. Знайти коефіцієнт розтягу та кут повороту в точці z_0, при відображенні комплексної площини, яке задається функцією

$$f(z)=e^{2z},\ z_0=2-\frac{\pi}{2}i.$$

11. Обчислити інтеграл $\int\limits_L \operatorname{Im}\left(z^2+\bar{z}^2\right)dz$,

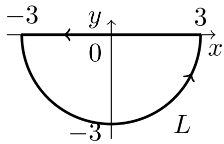
1)$L:\ y=x,\ 0\to 1+i;$

2)$L:\ y=x^2,\ 0\to 1+i;$

3)$L:$ ламана $z_1z_2z_3,\ z_1=0,\ z_2=1+i,\ z_3=i.$

12. Обчислити інтеграл $\oint\limits_C \operatorname{Im}\left(z^2+\bar{z}^2\right)dz$ по контуру C, який складається з верхнього півкола $|z|=a$ та відрізка дійсної осі, з обходом контура проти годинникової стрілки.

13. Обчислити $\oint\limits_L (z+\operatorname{Im}z)\,dz$, де крива L задана графічно:



14. Обчислити $\oint\limits_L \dfrac{e^z}{z}\,dz$, де

1)$L:\ |z|=1;$

2)$L:\ |z-2|=1$

за допомогою теореми Коші, інтегральної формули Коші або формули для похідних.

15. Обчислити $\int\limits_{-1+i}^{2+4i}(iz+1)\,dz.$

16. Обчислити $\int\limits_L\left(z^9+1\right)dz$, де $L:$ ламана $z_1z_2z_3,\ z_1=0,\ z_2=1,\ z_3=2i.$

17. Знайти область збіжності ряду

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{z^n}{\sin ni}+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{z^{-n}}{\cos ni}.$$

Варіант 26

18. Знайти всі лоранівські розвинення функції

1) $f(z) = \dfrac{5z+100}{50z^2+5z^3-z^4},\ z_0 = 0;$

2) $f(z) = \dfrac{2z}{z^2+4},\ z_0 = -3+2i;$

3) $f(z) = z\sin\dfrac{z^2-2z}{(z-1)^2},\ z_0 = 1.$

19. Визначити тип особливих точок функції

1) $f(z) = \dfrac{1-\sin z}{\cos z};$

2) $f(z) = \dfrac{\operatorname{ch} 3z - 1}{\sin z - z + \frac{z^3}{6}},\ z_0 = 0;$

3) $f(z) = \operatorname{ctg}\dfrac{1}{z} - \dfrac{1}{z^2}.$

20. За допомогою лишків обчислити інтеграли

1) $\displaystyle\oint\limits_{|z-2|=1/2} \frac{dz}{(z-3)(z^5-1)};$

2) $\displaystyle\oint\limits_{|z-3/2|=2} \frac{\sin z}{z(z-\pi)(z+\pi/3)}dz;$

3) $\displaystyle\oint\limits_{|z|=1} \frac{e^{iz}-1}{z^3}dz;$

4) $\displaystyle\oint\limits_{|z|=0{,}3} \frac{e^{4z}-1-\sin 4z}{z^2\operatorname{sh} 8iz}dz;$

5) $\displaystyle\int\limits_0^{2\pi} \frac{dt}{\sqrt{7}\sin t+4};$ 6) $\displaystyle\int\limits_0^{2\pi} \frac{dt}{(2+\cos t)^2};$

7) $\displaystyle\int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{(x^2+1)^4};$

8) $\displaystyle\int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{(x^3+1)\cos x}{x^4+5x^2+4}dx;$

9) $\displaystyle\oint\limits_{|z-4|=2} \left(z\operatorname{sh}\frac{1}{z-4} + \frac{2\sin\frac{\pi z}{6}}{(z-3)^2(z-1)}\right)dz.$

21. Знайти відображення функцією $\omega = f(z)$ області D, заданої в комплексній площині z, на область D_1 в комплексній площині ω та дати графічну інтерпретацію

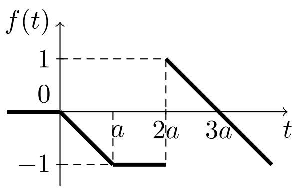
$$\omega = \cos z,\ D:\ x \in \left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right).$$

22. Знайти зображення оригіналу

1) $f(t) = (t^2-3)\operatorname{sh} t;$

2) $f(t) = \dfrac{\operatorname{ch} t}{t}e^{-2t};$

3)



23. Знайти оригінал за даним зображенням

$$F(p) = \frac{2-3p}{(p-2)(p^2-4p+5)}.$$

24. Розв'язати задачу Коші

1) $y'' + y = \eta(t) + 3\eta(t-2),$
$y(0) = y'(0) = 0;$

2) $y'' - 2y' + y = \dfrac{e^t}{\operatorname{ch}^2 t},\ y(0) = y'(0) = 0;$

3) $y'' + 3y' - 10y = 47\cos 3t - \sin 3t,$
$y(0) = 3,\ y'(0) = -1;$

4) $\begin{cases} x' = y+3, \\ y' = x+2, \end{cases}$
$x(0) = 1,\ y(0) = 0.$

25. Розв'язати інтегральне рівняння

$$x\cos x = \int\limits_0^x \cos(x-t)\,y(t)\,dt.$$

Варіант 27

1. Звести до тригонометричної форми комплексне число

$$\left(\sin\frac{\pi}{13} - i\cos\frac{\pi}{13}\right)^{39}.$$

2. Подати в алгебраїчній формі

$$\left(\cos\frac{\pi}{7} - i\sin\frac{\pi}{7}\right)^{49}.$$

3. Знайти всі значення кореня та побудувати їх

$$\sqrt[4]{-4}.$$

4. Зобразити множину точок

$$\{z \in \mathbb{C} | \, 1 < z\bar{z} < 2, \; \operatorname{Re} z > 0, \; 0 \le \operatorname{Im} z \le 1\}.$$

5. Визначити вид кривої

$$z = t^2 + 4t + 20 - i(t^2 + 4t + 4).$$

6. Побудувати лінії та області, що задані співвідношеннями

$$\operatorname{Re} z + \operatorname{Im} z < 1, \; |z - 1| < 1.$$

7. Знайти всі значення функцій

1) $\operatorname{sh}(3i - 4)$; 2) $\operatorname{Ln} 2^i$;

3) $\operatorname{Arccos}\dfrac{1-i}{1+i}$; 4) i^{3i}.

8. Перевірити, чи є функція $f(z)$ аналітичною, якщо так — знайти її похідну

$$f(z) = \operatorname{sh} z.$$

9. Відновити аналітичну функцію $f(z)$, якщо

1) $\operatorname{Re} f(z) = y^2 - x^2 + 2xy - y$;

2) $\operatorname{Im} f(z) = x^2 - y^2 - x, \; f(0) = 0$.

10. Знайти коефіцієнт розтягу та кут повороту в точці z_0, при відображенні комплексної площини, яке задається функцією

$$f(z) = e^{3z}, \; z_0 = \pi i.$$

11. Обчислити інтеграл $\int\limits_L (z + \operatorname{Im}(z + i))\, dz$,

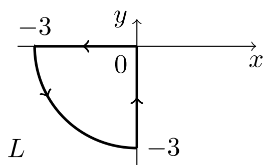
1) $L: \; y = x, \; 0 \to 1 + i$;

2) $L: \; y = x^2, \; 0 \to 1 + i$;

3) $L:$ ламана $z_1 z_2 z_3, \; z_1 = 0, \; z_2 = 1 + i, \; z_3 = i$.

12. Обчислити інтеграл $\oint\limits_C (z + \operatorname{Im}(z + i))\, dz$ по контуру C, який складається з верхнього півкола $|z| = a$ та відрізка дійсної осі, з обходом контура проти годинникової стрілки.

13. Обчислити $\oint\limits_L |z| \operatorname{Re} z^2 \, dz$, де крива L задана графічно:



14. Обчислити $\oint\limits_L \dfrac{dz}{z^2 + 16}$, де

1) $L: \; |z - 3i| = 2$;

2) $L: \; |z + 3i| = 2$

за допомогою теореми Коші, інтегральної формули Коші або формули для похідних.

15. Обчислити $\int\limits_{\pi/2}^{1+\pi i} \sin z \, dz$.

16. Обчислити $\dfrac{1}{2i} \int\limits_{|z|=R} \bar{z}\, dz$.

17. Знайти радіус збіжності ряду

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^n}{n e^{in^2}}.$$

Варіант 27

18. Знайти всі лоранівські розвинення функції

1) $f(z)=\dfrac{11z+242}{121z+11z^2-2z^3},\ z_0=0;$

2) $f(z)=\dfrac{2z}{z^2+4},\ z_0=2+3i;$

3) $f(z)=z\cos\dfrac{z}{z-3},\ z_0=3.$

19. Визначити тип особливих точок функції

1) $f(z)=\sin\dfrac{\pi}{z+1};$

2) $f(z)=\dfrac{e^{z^4}-1}{\cos z-1+\frac{z^2}{2}},\ z_0=0;$

3) $f(z)=\dfrac{\sin 3z^2}{z(z^3+1)}e^{\frac{1}{z}}.$

20. За допомогою лишків обчислити інтеграли

1) $\oint\limits_{|z|=2}\dfrac{\operatorname{tg} z}{z-1}dz;$ 2) $\oint\limits_{|z-\pi|=1}\dfrac{\left(z^2+\pi\right)^2}{i\sin z}dz;$

3) $\oint\limits_{|z|=1/2}\dfrac{1-z^4+3z^6}{2z^3}dz;$

4) $\oint\limits_{|z|=0,5}\dfrac{e^{3z}-\operatorname{ch}6z}{z\sin\pi z}dz;$

5) $\int\limits_0^{2\pi}\dfrac{dt}{\sqrt{5}\sin t+3};$ 6) $\int\limits_0^{2\pi}\dfrac{dt}{\left(\sqrt{7}+\sqrt{3}\cos t\right)^3};$

7) $\int\limits_{-\infty}^{\infty}\dfrac{dx}{\left(x^2+3\right)^2\left(x^2+15\right)^2};$

8) $\int\limits_{-\infty}^{\infty}\dfrac{\left(x^2+1\right)\sin x}{x^4+5x^2+4}dx;$

9) $\oint\limits_{|z+2i|=2}\left(\dfrac{\pi}{e^{\pi z/2}+1}+\right.$

$\left.+\dfrac{4\cos\frac{\pi z}{1-2i}}{(z-1+2i)^2(z-3+2i)}\right)dz.$

21. Знайти відображення функцією $\omega=f(z)$ області D, заданої в комплексній площині z, на область D_1 в комплексній площині ω та дати графічну інтерпретацію

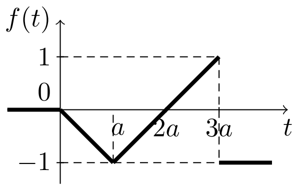
$$\omega=\frac{1}{z},\ D:\ \begin{cases}|z-1|<1\\ y>x\end{cases}.$$

22. Знайти зображення оригіналу

1) $f(t)=(t-2)\sin 4t;$

2) $f(t)=\dfrac{1-\cos 2t}{t}e^{-t};$

3)



23. Знайти оригінал за даним зображенням

$$F(p)=\frac{2p+3}{(p-1)\left(p^2-p+1\right)}.$$

24. Розв'язати задачу Коші

1) $y''+3y'=\eta(t-2),$
$y(0)=4,\ y'(0)=0;$

2) $y''+2y'+y=\dfrac{e^{-t}}{1+t^2},$
$y(0)=y'(0)=0;$

3) $y''+y'-2y=e^{-t},$
$y(0)=-1,\ y'(0)=0;$

4) $\begin{cases}x'=x+3y+3,\\ y'=x-y+1,\end{cases}$
$x(0)=0,\ y(0)=1.$

25. Розв'язати інтегральне рівняння

$$y(x)=x-\int\limits_0^x\operatorname{sh}(x-t)\,y(t)\,dt.$$

Варіант 28

1. Звести до тригонометричної форми комплексне число

$$\left(\cos\frac{\pi}{5} - i - i\sin\frac{\pi}{5}\right)^{225}.$$

2. Подати в алгебраїчній формі

$$\left(-\cos\frac{\pi}{9} + i\sin\frac{\pi}{9}\right)^{18}.$$

3. Знайти всі значення кореня та побудувати їх

$$\sqrt[5]{5}.$$

4. Зобразити множину точок

$$\left\{z \in \mathbb{C} \,|\, |z-1| < 1,\ \arg z \le \frac{\pi}{4},\right.$$
$$\left.\arg(z-1) > \pi\right\}.$$

5. Визначити вид кривої

$$z = t^2 + 2t + 5 + i\left(t^2 + 2t + 1\right).$$

6. Побудувати лінії та області, що задані співвідношеннями

$$|2z - 3| \le 1.$$

7. Знайти всі значення функцій

1) $\sin(2+i)$; 2) $(-2)^{5i}$;

3) $\operatorname{Arctg}\dfrac{i}{i+1}$; 4) $\operatorname{sh}(2-\pi i)$.

8. Перевірити, чи є функція $f(z)$ аналітичною, якщо так — знайти її похідну

$$f(z) = z\bar{z} + \operatorname{Re}(i\bar{z}).$$

9. Відновити аналітичну функцію $f(z)$, якщо

1) $\operatorname{Im} f(z) = -\operatorname{sh}(2y)\sin(2x+1)$;

2) $\operatorname{Re} f(z) = -2xy - 2y,\ f(0) = i$.

10. Знайти коефіцієнт розтягу та кут повороту в точці z_0, при відображенні комплексної площини, яке задається функцією

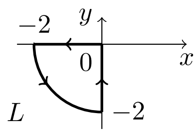
$$f(z) = z^2 + 1,\ z_0 = 1 + i\sqrt{3}.$$

11. Обчислити інтеграл $\int\limits_L z^2 \operatorname{Im} z\, dz$,

1) $L:\ y = x,\ 0 \to 1+i$;
2) $L:\ y = x^2,\ 0 \to 1+i$;
3) $L:$ ламана $z_1z_2z_3,\ z_1 = 0,\ z_2 = 1+i,\ z_3 = i$.

12. Обчислити інтеграл $\oint\limits_C z^2 \operatorname{Im} z\, dz$ по контуру C, який складається з верхнього півкола $|z| = a$ та відрізка дійсної осі, з обходом контура проти годинникової стрілки.

13. Обчислити $\oint\limits_L (\bar{z} + \operatorname{Re} z)\, dz$, де крива L задана графічно:



14. Обчислити $\displaystyle\oint\limits_{|z+i|=3} \frac{\sin z}{z+i} dz$

за допомогою теореми Коші, інтегральної формули Коші або формули для похідних.

15. Обчислити $\displaystyle\int\limits_0^{3i} \left(z^2 + iz + 1\right)\, dz$.

16. Обчислити $\displaystyle\int\limits_L \left(\sin z + z^2\right)\, dz$, де L – ламана $z_1z_2z_3,\ z_1 = 0,\ z_2 = 1,\ z_3 = 2i$.

17. Знайти область збіжності ряду

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{z^{n+1}} + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{3^{n+1}}.$$

Варіант 28

18. Знайти всі лоранівські розвинення функції

1) $f(z) = \dfrac{6z+144}{72z^2+6z^3-z^4}$, $z_0 = 0$;

2) $f(z) = \dfrac{2z}{z^2+4}$, $z_0 = 3+2i$;

3) $f(z) = z\sin\pi\dfrac{z-1}{z-2}$, $z_0 = 2$.

19. Визначити тип особливих точок функції

1) $f(z) = e^{-\frac{1}{z^2}}$;

2) $f(z) = \dfrac{\sin z^4 - z^4}{\operatorname{sh} z - z - \frac{z^3}{6}}$, $z_0 = 0$;

3) $f(z) = \dfrac{\cos \pi z}{(4z^2-1)(z^2+1)}$.

20. За допомогою лишків обчислити інтеграли

1) $\displaystyle\oint\limits_{|z-1|=5} \frac{\cos\left(\frac{\pi}{6}z\right)}{(z-1)(z+3)^2}dz$;

2) $\displaystyle\oint\limits_{|z|=2} \frac{\sin^2 z}{z\cos z}dz$; 3) $\displaystyle\oint\limits_{|z|=2} z^3\cos\frac{2i}{z}\,dz$;

4) $\displaystyle\oint\limits_{|z|=0{,}2} \frac{\operatorname{ch} 2z - \cos 2z}{z^2\sin 8z}dz$;

5) $\displaystyle\int\limits_0^{2\pi} \frac{dt}{2\sqrt{2}\sin t + 3}$;

6) $\displaystyle\int\limits_0^{2\pi} \frac{dt}{\left(\sqrt{7}+\cos t\right)^2}$;

7) $\displaystyle\int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{x^2+2}{x^4+7x^2+12}dx$;

8) $\displaystyle\int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos 2x - \cos x}{\left(x^2+1\right)^2}dx$;

9) $\displaystyle\oint\limits_{|z-3|=2} \left(z\cos\frac{1}{z-3} + \frac{4\operatorname{ch}\left(\frac{\pi i z}{2}\right)}{z(z-2)^2}\right)dz$.

21. Знайти відображення функцією $\omega = f(z)$ області D, заданої в комплексній площині z, на область D_1 в комплексній площині ω та дати графічну інтерпретацію

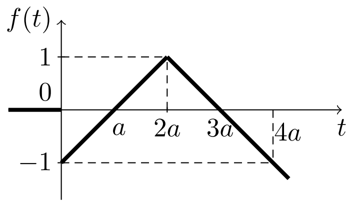
$$\omega = \frac{2iz}{z+3},\ D:\ |z-1| < 2.$$

22. Знайти зображення оригіналу

1) $f(t) = t\left(e^{-t} + \operatorname{sh} t\right)$;

2) $f(t) = \dfrac{1-\operatorname{ch} t}{t}e^{-t}$;

3)



23. Знайти оригінал за даним зображенням

$$F(p) = \frac{2-p}{p^3-2p^2+5p}.$$

24. Розв'язати задачу Коші

1) $y'' + 4y = 2\eta(t-2) - \eta(t-1)$,
$y(0) = y'(0) = 0$;

2) $y'' - 4y = \operatorname{th}^2 2t$, $y(0) = y'(0) = 0$;

3) $y'' - 2y' = e^t\left(t^2+t-3\right)$,
$y(0) = 2$, $y'(0) = 2$;

4) $\begin{cases} x' = -x + 3y + 2, \\ y' = x + y + 1, \end{cases}$
$x(0) = 0$, $y(0) = 1$.

25. Розв'язати інтегральне рівняння

$$y(x) = e^{-x} + \frac{1}{2}\int\limits_0^x (x-t)^2\, y(t)\,dt.$$

Варіант 29

1. Звести до тригонометричної форми комплексне число

$$\left(-\sin\frac{\pi}{12}+i\cos\frac{\pi}{12}\right)^{72}.$$

2. Подати в алгебраїчній формі

$$\left(\cos\frac{\pi}{8}+i\sin\frac{\pi}{8}\right)^{48}.$$

3. Знайти всі значення кореня та побудувати їх

$$\sqrt[6]{-1}.$$

4. Зобразити множину точок

$$\left\{z\in\mathbb{C}\,|\,|z-i|<1,\ \arg z>\frac{\pi}{4},\ \arg(z+1-i)<\pi\right\}.$$

5. Визначити вид кривої

$$z=2t^2+2t+1-i\left(t^2+t+4\right).$$

6. Побудувати лінії та області, що задані співвідношеннями

$$|z-i|-|z+i|>2.$$

7. Знайти всі значення функцій

1) $\cos(1-4i)$; 2) $(i+1)^{2i}$;

3) $\operatorname{Arctg}\dfrac{1}{i}$; 4) $(-i)^{5i}$.

8. Перевірити, чи є функція $f(z)$ аналітичною, якщо так — знайти її похідну

$$f(z)=\sin z.$$

9. Відновити аналітичну функцію $f(z)$, якщо

1) $\operatorname{Re} f(z)=y^2-x^2$;

2) $\operatorname{Im} f(z)=2xy-2y,\ f(0)=1.$

10. Знайти коефіцієнт розтягу та кут повороту в точці z_0, при відображенні комплексної площини, яке задається функцією

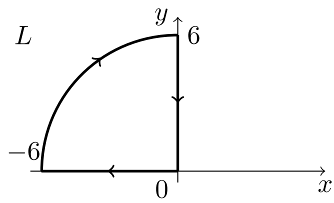
$$f(z)=z^3-5,\ z_0=1+i.$$

11. Обчислити інтеграл $\int\limits_L(1-i)\,\bar z\,dz$,

1) $L:\ y=x,\ 0\to 1+i$;
2) $L:\ y=x^2,\ 0\to 1+i$;
3) $L:$ ламана $z_1z_2z_3,\ z_1=0,\ z_2=1+i,\ z_3=i$.

12. Обчислити інтеграл $\oint\limits_C(1-i)\,\bar z\,dz$ по контуру C, який складається з верхнього півкола $|z|=a$ та відрізка дійсної осі, з обходом контура проти годинникової стрілки.

13. Обчислити $\oint\limits_L\left(z+\operatorname{Im}(z+i)\right)\,dz$, де крива L задана графічно:



14. Обчислити $\oint\limits_L\dfrac{z^2}{z-3i}\,dz$, де

1) $L:\ |z|=1$;
2) $L:\ |z|=4$

за допомогою теореми Коші, інтегральної формули Коші або формули для похідних.

15. Обчислити $\int\limits_{\pi}^{-1+\pi/2}\cos z dz$.

16. Обчислити $\int\limits_L z\operatorname{Im} z^2dz$,
L – відрізок прямої $z_A=0,\ z_B=1+i$.

17. Знайти область збіжності ряду

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{z}{5}\right)^n+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{z^n}.$$

Варіант 29

18. Знайти всі лоранівські розвинення функції

1) $f(z) = \dfrac{13z+338}{169z+13z^2-2z^3},\ z_0 = 0;$

2) $f(z) = \dfrac{2z}{z^2-4},\ z_0 = -1+3i;$

3) $f(z) = z\cos\dfrac{z}{z-5},\ z_0 = 5.$

19. Визначити тип особливих точок функції

1) $f(z) = \operatorname{sh}\dfrac{1}{z};$

2) $f(z) = z\cos\dfrac{2}{z^3},\ z_0 = 0;$

3) $f(z) = \dfrac{\sin 3z}{z(1-\cos z)}.$

20. За допомогою лишків обчислити інтеграли

1) $\displaystyle\oint\limits_{|z+i|=3/2} \frac{\sin z}{z^2(z-\pi/2)^3}\,dz;$

2) $\displaystyle\oint\limits_{|z-\pi|=2} \frac{\cos^2 z}{z\sin z}\,dz;$

3) $\displaystyle\oint\limits_{|z|=1/2} \frac{e^z-\sin z}{z^2}\,dz;$

4) $\displaystyle\oint\limits_{|z|=4} \frac{\operatorname{sh} iz-\sin iz}{z^3\operatorname{sh}\left(\frac{z}{3}\right)}dz;$

5) $\displaystyle\int\limits_0^{2\pi} \frac{dt}{2\sqrt{3}\sin t+4};$

6) $\displaystyle\int\limits_0^{2\pi} \frac{dt}{\left(\sqrt{7}+\sqrt{3}\cos t\right)^2};$

7) $\displaystyle\int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{(x^2-10x+29)^2};$

8) $\displaystyle\int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{(x^2+x)\sin x}{x^4+13x^2+36}dx;$

9) $\displaystyle\oint\limits_{|z-2i|=2} \left(\frac{2\sin\frac{\pi z}{2+4i}}{(z-1-2i)^2(z-3-2i)} - \frac{\pi}{e^{\pi z/2}+1}\right)dz.$

21. Знайти відображення функцією $\omega = f(z)$ області D, заданої в комплексній площині z, на область D_1 в комплексній площині ω та дати графічну інтерпретацію

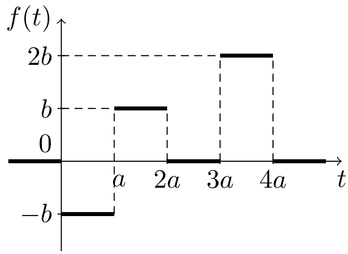
$$\omega = \ln z,\ D:\ x^2+y^2<1,\ y>0.$$

22. Знайти зображення оригіналу

1) $f(t) = (t-4)\sin 3t;$

2) $f(t) = \dfrac{1-e^{4t}}{t}e^{-4t};$

3)



23. Знайти оригінал за даним зображенням

$$F(p) = \frac{2}{(p+1)(p^2+2p+2)}.$$

24. Розв'язати задачу Коші

1) $y''+9y = \eta(t-3),\ y(0) = y'(0) = 0;$

2) $y''+2y' = \dfrac{1}{\operatorname{ch}^2 t},\ y(0) = y'(0) = 0;$

3) $y''+y = 2\cos t,\ y(0) = 0,\ y'(0) = 1;$

4) $\begin{cases} x' = 3y, \\ y' = 3x+1, \end{cases}$
$x(0) = 2,\ y(0) = 0.$

25. Розв'язати інтегральне рівняння

$$y(x) = \frac{x^2}{2} + \int\limits_0^x (x-t)\,e^{x-t}y(t)\,dt.$$

Варіант 30

1. Звести до тригонометричної форми комплексне число

$$\left(\cos\frac{\pi}{8} - i + i\sin\frac{\pi}{8}\right)^{84}.$$

2. Подати в алгебраїчній формі

$$\left(\cos\frac{\pi}{5} - i\sin\frac{\pi}{5}\right)^{55}.$$

3. Знайти всі значення кореня та побудувати їх

$$\sqrt[5]{1-i}.$$

4. Зобразити множину точок

$$\{z \in \mathbb{C} \,|\, |z-2-i| \geq 1,\ 1 \leq \operatorname{Re} z < 3,\ 0 < \operatorname{Im} z \leq 2\}.$$

5. Визначити вид кривої

$$z = t - 2 + i\left(t^2 - 4t + 5\right).$$

6. Побудувати лінії та області, що задані співвідношеннями

$$\arg\frac{z-1}{z+1} = 0.$$

7. Знайти всі значення функцій

1) $\cos(1+2i)$; 2) $(3i-4)^i$;

3) $\operatorname{Arcsin}\dfrac{2+i}{i}$; 4) $(-1)^{4i}$.

8. Перевірити, чи є функція $f(z)$ аналітичною, якщо так — знайти її похідну

$$f(z) = 2z + i\operatorname{Im} z.$$

9. Відновити аналітичну функцію $f(z)$, якщо

1) $\operatorname{Im} f(z) = \operatorname{arctg}\dfrac{y}{x}$;

2) $\operatorname{Re} f(z) = x^3 - 3xy^2 - x,\ f(0) = 0$.

10. Знайти коефіцієнт розтягу та кут повороту в точці z_0, при відображенні комплексної площини, яке задається функцією

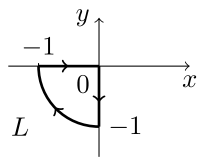
$$f(z) = \operatorname{ch} z,\ z_0 = \pi + 1 - i.$$

11. Обчислити інтеграл $\int\limits_L \operatorname{Im}\left(z|z|^2\right)dz$,

1)$L:\ y = x,\ 0 \to 1+i$;
2)$L:\ y = x^2,\ 0 \to 1+i$;
3)$L:$ ламана $z_1z_2z_3,\ z_1 = 0,\ z_2 = 1+i,\ z_3 = i$.

12. Обчислити інтеграл $\oint\limits_C \operatorname{Im}\left(z|z|^2\right)dz$ по контуру C, який складається з верхнього півкола $|z| = a$ та відрізка дійсної осі, з обходом контура проти годинникової стрілки.

13. Обчислити $\oint\limits_L \operatorname{Im}\left(z|z|^2\right)dz$, де крива L задана графічно:



14. Обчислити $\oint\limits_L \dfrac{dz}{\left(z^2+16\right)^2}$, де

1)$L:\ |z-3i| = 2$;
2)$L:\ |z+3i| = 2$

за допомогою теореми Коші, інтегральної формули Коші або формули для похідних.

15. Обчислити $\int\limits_{\pi}^{\pi i} e^{-iz}dz$.

16. Обчислити $\int\limits_L \left(z^3 + \sin z\right)dz$,

$L:\ \{|z| = 1, \operatorname{Re} z \geq 0\}$.

17. Знайти радіус збіжності ряду

$$\sum_{n=1}^{\infty} \ln(in)\, z^n.$$

Варіант 30

18. Знайти всі лоранівські розвинення функції

1) $f(z) = \dfrac{7z + 196}{98z^2 + 7z^3 - z^4}$, $z_0 = 0$;

2) $f(z) = \dfrac{2z}{z^2 - 4}$, $z_0 = 2 + 2i$;

3) $f(z) = z \sin \dfrac{\pi z}{z - a}$, $z_0 = a$.

19. Визначити тип особливих точок функції

1) $f(z) = \dfrac{1}{z^2 (2 - \cos z)}$;

2) $f(z) = \dfrac{\cos \frac{z^4}{2}}{\operatorname{ch} z - 1 - \frac{z^2}{2}}$, $z_0 = 0$;

3) $f(z) = \dfrac{2z - \sin 2z}{z^3 (z^2 + 1)}$.

20. За допомогою лишків обчислити інтеграли

1) $\displaystyle\oint\limits_{|z+i\sqrt{2}|=2} \frac{ze^{2z}}{z^4 + 8z^2 - 9}\, dz$;

2) $\displaystyle\oint\limits_{|z-3/2|=2} \frac{z^3 + \sin 2z}{(z - \pi) \sin \frac{z}{2}} dz$;

3) $\displaystyle\oint\limits_{|z|=2} \frac{2z^3 + 3z^2 - 2}{2z^3} dz$;

4) $\displaystyle\oint\limits_{|z|=0,3} \frac{e^{3z} - 1 - \sin 3z}{z^2 \operatorname{sh} 3\pi z}\, dz$;

5) $\displaystyle\int\limits_0^{2\pi} \frac{dt}{\sqrt{21} \sin t + 5}$;

6) $\displaystyle\int\limits_0^{2\pi} \frac{dt}{\left(\sqrt{7} + \cos t\right)^2}$; 7) $\displaystyle\int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{x^2}{\left(x^2 + 11\right)^2} dx$;

8) $\displaystyle\int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{\left(x^2 + x\right) \cos x}{x^4 + 13x^2 + 36} dx$;

9) $\displaystyle\oint\limits_{|z-2|=2} \left(z \sin \frac{i}{z - 2} - \frac{2 \operatorname{sh}\left(\frac{\pi i z}{2}\right)}{(z - 1)^2 (z + 1)} \right) dz.$

21. Знайти відображення функцією $\omega = f(z)$ області D, заданої в комплексній площині z, на область D_1 в комплексній площині ω та дати графічну інтерпретацію

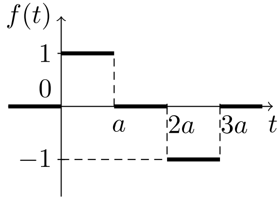
$$\omega = \frac{1}{z - i},\ D:\ y \geq 0.$$

22. Знайти зображення оригіналу

1) $f(t) = t (\operatorname{ch} t + \operatorname{sh} t)$;

2) $f(t) = \dfrac{e^t - t - 1}{t}$;

3)



23. Знайти оригінал за даним зображенням

$$F(p) = \frac{2 - p}{(p - 1)\left(p^2 - 4p + 5\right)}.$$

24. Розв'язати задачу Коші

1) $y'' + 2y' = \eta(t - 1)$, $y(0) = y'(0) = 1$;

2) $y'' + y' = \dfrac{1}{\left(1 + e^t\right)^2}$, $y(0) = y'(0) = 0$;

3) $y'' - y = 4 \sin t + 5 \cos 2t$,
$y(0) = -1$, $y'(0) = -2$;

4) $\begin{cases} x' = x + 3y, \\ y' = x - y, \end{cases}$
$x(0) = 1$, $y(0) = 0$.

25. Розв'язати інтегральне рівняння

$$y(x) = x + 2 \int\limits_0^x \left[(x - t) - \sin(x - t)\right] y(t)\, dt.$$

Список літератури

[1] *Волковыский Л.И., Лунц Г.Л., Араманович И.Г.* Сборник задач по теории функций комплексного переменного. – М.: Наука, 1975. – 320 с.

[2] *Гольберг А.А.* Комплексний аналіз / А.А. Гольберг, М.М. Шеремета, М.В. Заболоцький, О.Б. Скасків. – Львів: Афіша, 2002. – 203 с.

[3] *Грищенко О.Ю., Нагнибіда М.І., Настасієв П.П.* Теорія функцій комплексної змінної. Розв'язування задач. – К.: Вища школа, 1994. – 376 с.

[4] Сборник задач по теории аналитических функций / под ред. М.А. Евграфова. – М.: Наука, 1972. – 415 с.

[5] *Краснов М.Л., Киселев А.И, Макренко Г.И.* Функции комплексного переменного. Операционное исчисление. Теория устойчивости. – М.: Наука, 1971. – 256 с.

[6] *Лаврентьев М.А., Шабат Б.В.* Методы теории функкий комплексного переменного. – М.: Наука, 1987. – 688 с.

[7] *Маркушевич А.И.* Теория аналитических функций: в 2 т. – М.: Наука, 1967-1968. – Т. 1 – 486 с.; Т.2 – 624 с.

[8] *Маркушевич А.И.* Избранные главы теории аналитических функций. – М.: Наука, 1976. – 191 с.

[9] *Мартиненко В.С.* Операційне числення. – К.: Вища школа, 1990. – 360 с.

[10] *Мартиненко М.А., Юрик І.І.* Теорія функцій комплексної змінної. Операційне числення – К.: Слово, 2008. – 295 с.

[11] *Мельник Т.А.* Комплексний аналіз: підручник. – К.: ВПЦ "Київський університет", 2015. – 192 с.

[12] *Привалов И.И.* Введение в теорию функций комплексного переменного. – М.: Наука, 1984. – 432 с.

[13] *Романовский Т.И.* Ряды Фурье. Теория поля. Аналитические и специальные функции. Преобразование Лапласа. – М.: Наука, 1980. – 335 с.

[14] *Самойленко В.Г.* Операційне числення. Методичні вказівки для практичних занять з дисципліни "Комплексний аналіз" для студентів механіко-математичного факультету. / Упорядники: В.Г. Самойленко, А.В. Ловейкін, В.А. Бородін. – К.: ВПЦ "Київський університет", 2007. – 32 с.

[15] *Самойленко В.Г.* Комплексний аналіз. Приклади і задачі: навчальний посібник. / В.Г. Самойленко, В.А. Бородін, Г.В. Верьовкіна, А.В. Ловейкін, І.Б. Романенко / За ред. В.Г. Самойленка. – К.: ВПЦ "Київський університет", 2010. – 224 с.

[16] *Сидоров Ю.В., Федорюк М.В., Шабунин М.И.* Лекции по теории функций комплексного переменного. – М.: Наука, 1989. – 480 с.

[17] *Фукс Б.А., Шабат Б.В.* Функции комплексного переменного и некоторые их приложения. – М.: Наука, 1964. – 388 с.

[18] *Шабат Б.В.* Введение в комплексный анализ. – М.: Наука, 1976. – 320 с.

[19] *Шелковников Ф.А., Такайшвили К.Г.* Сборник задач по операционному исчислению. – М.: Высшая школа, 1968. – 249 с.

[20] *Штокало И.З.* Операционное исчисление (обобщения и приложения). – К.: Наукова думка, 1972. – 303 с.

[21] *Чудесенко В.Ф.* Сборник заданий по специальным курсам высшей математики (типовые расчеты). – М.: Высшая школа, 1983. – 112 с.